

## Die Profile der äußeren Teile der starken Fraunhoferschen Linien.

Von **M. Minnaert** in Utrecht.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 1. Februar 1935.)

Die Theorie PANNEKOEKS wird so abgeändert, daß die verschiedene Neigung der Strahlen beim Durchlaufen der Sonnenatmosphäre berücksichtigt wird. Die Intensitätsverteilung in den Flügeln der starken Linien wird so genau wie möglich berechnet, und es werden einfache Formeln angegeben, welche diese Intensitätsverteilung genügend beschreiben. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Messungen in den äußeren Teilen der Linien zu kontrollieren und zu vervollständigen. Für eine Reihe starker Linien des Sonnenspektrums wird die äquivalente Breite mit der Flügelform verglichen und gefunden, daß die erste Größe immer etwas zu klein gemessen wird gegenüber dem, was man theoretisch aus der zweiten erwarten würde.

Bei dem Vergleich der Profile oder äquivalenten Breiten der starken FRAUNHOFERSchen Linien, welche von verschiedenen Autoren angegeben worden sind, findet man Unterschiede, die nicht durch die Fehler der Photometrie allein erklärt werden können. So findet z. B. WOOLLEY<sup>1)</sup> für die äquivalente Breite der *K*-Linie von  $\text{Ca}^+$  aus den Messungen UNSÖLDS 12,6 Å, während man aus denselben Daten auch 14,6 und nach einer Reduktion selbst 17,4 Å erhalten kann. Solche Unterschiede sind wohl durch zwei Ursachen zu erklären: 1. Bei solchen starken Linien ist die Wahl des kontinuierlichen Grundes immer unbestimmt, weil sich die Intensität der Sonnenstrahlung und die Empfindlichkeit der Platte im Gebiet der Linie schon merklich ändern. 2. Es ist schwer, die enorm ausgedehnten „Flügel“ solcher Linien genügend genau zu bestimmen. Durch diese Schwierigkeiten wird die Bestimmung der photometrischen Zahlenwerte öfters mehr Gefühlsache als methodische Messung.

Zu einem großen Teil können die Unsicherheiten vermieden werden, falls man annehmen darf, daß die Theorie wenigstens von den äußeren Teilen der FRAUNHOFERSchen Linien eine genügend genaue Beschreibung gibt; es scheint in der Tat, daß die noch bestehenden Schwierigkeiten sich hauptsächlich auf die zentralen Teile der Linien beziehen. Wir werden darum versuchen, die Lichtverteilung in den äußeren Teilen der Linien zu berechnen und hieraus eine Methode abzuleiten, die es gestattet, die Messungen so gut wie möglich zu verwerten. Es sei aber ausdrücklich hervorgehoben, daß zwar nach unserer Auffassung Theorie und Beobachtung

<sup>1)</sup> M. N. 93, 700, 1933.

einander helfen müssen, daß aber immer sorgfältig unterschieden werden muß zwischen den direkten Meßresultaten und der Anwendung einer Theorie, auch wenn diese gut begründet erscheint.

*1. Die theoretische Form der Flügel von starken FRAUNHOFER'schen Linien.*

Wir wollen ausgehen von der Theorie PANNEKOEKS<sup>1)</sup>, welche wohl auf die zuverlässigsten Grundlagen aufgebaut ist. Es wird hierbei angenommen, daß ein angeregtes Atom seine Energie in einem bestimmten Bruchteil der Fälle als Resonanzstrahlung aussendet, während dieselbe in den anderen Fällen in Wärmeenergie verwandelt wird. Außer der monochromatischen Absorption, bestimmt durch den Koeffizienten  $s_0$ , besteht noch eine allgemeine Absorption  $\kappa_0$ . Die wichtigste Neuerung, welche die Theorie PANNEKOEKS brachte, ist die genaue Angabe der Zunahme der Anzahl der Stöße und der Vergrößerung der allgemeinen Absorption mit wachsender Tiefe und wachsendem Druck in der Atmosphäre.

Drei typische Grenzfälle werden jetzt unterschieden:

Die Konzentration der absorbierenden Atome ist konstant (Fall B von PANNEKOEK);

die Konzentration der absorbierenden Atome ist dem Elektronendruck proportional (Fall A von PANNEKOEK);

die Konzentration der absorbierenden Atome ist dem Elektronendruck umgekehrt proportional (Fall C von PANNEKOEK).

*Fall B: Die Konzentration  $s_0$  ist konstant.* Es ist merkwürdig, daß für diesen Fall die Lichtverteilung, welche PANNEKOEK aus seiner schönen Theorie nach langer Rechnung erhalten hat, zahlenmäßig fast genau mit dem einfachen Ausdruck, welchen SCHUSTER vor 30 Jahren angegeben hat, übereinstimmt. Das Intensitätsverhältnis  $i/i_0$  zwischen einem Punkt der Linie und das Kontinuum ist nämlich eine Funktion der Größe  $\alpha$ , welche proportional  $1/s_0^2$  ist, und zwar findet man empirisch, daß die Resultate PANNEKOEKS mit großer Annäherung durch die Formel

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{1 + \text{const.}/\sqrt{\alpha}} \quad \text{oder} \quad \frac{i}{i_0} = \frac{1}{1 + \text{const. } s_0} \quad (1)$$

dargestellt werden. Die Übereinstimmung ersieht man aus Tabelle 1, welche für die drei typischen FRAUNHOFER'schen Linien PANNEKOEKS berechnet ist (alle zum Modell A gehörend); die zweite Linie hat wahrscheinlich die normale Form, während die erste und dritte extremere Fälle darstellen. Für die einzelnen Linientypen wurde die Konstante von Formel (1) gleich 0,69, 0,66 oder 0,66 gewählt.

<sup>1)</sup> M. N. 91, 139, 519, 1930.

Tabelle 1.

$\alpha$	Pannekoek	Formel (1)	Pannekoek	Formel (1)	Pannekoek	Formel(1)
10 000	—	0,993	0,993	0,993	—	—
400	0,966	966	—	968	—	—
100	931	936	938	938	0,938	0,938
25	878	979	883	883	—	—
4	744	743	752	753	—	—
1	594	592	597	602	0,602	0,602
0,25	439	420	434	430	—	—
0,04	286	225	244	232	—	—
0,01	217	127	149	131	0,149	0,131
0,0001	—	014	029	013	0,029	0,013

Merkliche Abweichungen kommen nur bei Werten von  $i/i_0 < 40\%$  vor, außerdem sind selbst im Zentrum diese Abweichungen für manche Zwecke zu vernachlässigen. Das totale Areal unterscheidet sich nur um  $0,5\%$  von dem Areal nach PANNEKOEK.

Nun wurde in der Theorie zur Vereinfachung angenommen, daß alle Strahlen senkrecht durch die Atmosphäre gehen. Für eine genaue Beschreibung des Linienprofils müssen wir aber untersuchen, welche Änderungen sich ergeben: 1. wenn man in Betracht zieht, daß die Strahlen verschiedene Neigungen haben; 2. wenn man eine höhere Annäherung berechnet, um das besondere Profil der Linien im Zentrum der Sonne vom mittleren Profil zu unterscheiden.

Die Schiefe der Strahlen wird in Rechnung gezogen durch Hinzufügung von Koeffizienten zu den Gleichungen PANNEKOEKS, welche jetzt lauten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (1 + \alpha x) z; \quad \frac{dz}{dx} = 2 \left( \frac{x}{x+q} + \alpha x \right) (y - 2E).$$

Hier bedeuten:  $y$  und  $z$  die Summe bzw. die Differenz der aus- und der eintretenden Strahlung;  $E$  die schwarze Strahlung in der optischen Tiefe  $x$ ;

$$\frac{x}{x+q} = \frac{\text{Streuungskoeffizient}}{\text{totaler Absorptionskoeffizient}}; \quad x = - \int s_0 \varrho dh.$$

Diese Gleichungen wurden gelöst für vier Punkte in den Flügeln einer typischen FRAUNHOFERschen Linie, welche gekennzeichnet ist durch die Konstanten  $\alpha q^2 = 10^6$ ,  $c\bar{\kappa}/\kappa_0 = 1,5$  (numerische Methode und Bezeichnung nach PANNEKOEK). Im Kontinuum wird die austretende Strahlung bei dieser Annäherung durch Grenzübergang in den Differentialgleichungen gefunden; deren Lösung für  $x = 0$  wird dann:

$$E_0 \left( \frac{2}{1 + \sqrt[3]{4}} + \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} \frac{\sqrt[4]{3}}{1 + \sqrt[3]{4}} \right) = 2E_0.$$

Die Profile der äußeren Teile der starken FRAUNHOFER'schen Linien. 43

Die relative Intensität in den Flügeln ist in Spalte 5 der Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 2.

$\alpha$	Koeffizient von $E_0$	Koeffizient von $\frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} E_0$	$i/i_0$			
			Pannekoeck	1. Annäherung	2. Annäherung	Formel (1)
10 000	1,066	0,613	0,993	0,993	0,993	0,993
100	1,016	0,561	0,938	0,931	0,930	0,930
25	0,969	0,512	0,883	0,869	0,869	0,869
1	0,723	0,287	0,597	0,577	0,563	0,571

Ein Vergleich dieser Zahlen mit denen PANNEKOEKS (Spalte 4) zeigt, daß, obwohl die Neigung der Strahlen die austretende Lichtstärke geringer macht, dieses ungefähr im gleichen Verhältnis im Kontinuum wie in der Spektrallinie geschieht; die Linie wird nur ganz wenig tiefer.

Schließlich können wir noch ziemlich einfach eine bessere Annäherung für die Lichtverteilung von Spektrallinien im Zentrum der Sonne erhalten. Denn die senkrecht austretende Strahlung wird beschrieben durch die Gleichung:

$$\frac{dI}{dx} = (1 + \alpha x) I - (1 + \alpha x) \frac{x}{x+q} - \frac{1}{2} (1 + \alpha x) \frac{q}{q+x} (I + I').$$

Deren Integration ergibt:

$$I_{x=0} = \int_0^{\infty} (1 + \alpha x) \left( \frac{x}{q+x} E + \frac{q}{q+x} \frac{I + I'}{2} \right) e^{-\left(x + \frac{\alpha x^2}{2}\right)} dx.$$

Für  $I + I' = y$  kann man die Werte annehmen, welche in erster Annäherung als Funktion der Tiefe bestimmt wurden. Durch numerische Integration findet man die relativen Intensitäten, welche in Spalte 6 angegeben sind. Für das Kontinuum kommt:

$$E_0 \left( 1 + \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} \right) = 2,5 E_0.$$

Der Vergleich mit der vorigen Spalte zeigt, daß die neue Annäherung keine nennenswerten Änderungen zur Folge hat. Schließlich ergibt sich also, daß die weiterentwickelte Theorie PANNEKOEKS gleichfalls zu einer theoretischen Lichtverteilung nach Formel (1) führt, nur mit einer etwas abgeänderten Konstanten:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{1 + 0,75/\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{1 + 0,75 s_0 \sqrt{\frac{p'}{\kappa_0 g}}}.$$

Fall A: Die Konzentration wächst proportional dem Elektronendruck:  $s_0 = \sigma P$ . Wir versuchen zuerst, ob die Lichtverteilung, wie PANNEKOEK sie berechnet hat, auch in diesem Falle durch eine einfache Formel

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{1 + c \frac{\sigma}{\kappa_0}}$$

vom SCHUSTERSchen Typus dargestellt werden kann.

Tabelle 3.

$\sigma/\kappa_0$	$i/i_0$				
	Pannekoek	1. Annäherung	2. Annäherung	Formel (3)	Formel (4)
0	1	1	1	1	1
0,1	0,948	0,958	0,944	0,952	0,945
0,5	0,798	0,829	0,790	0,800	0,792
1	0,683	0,725	0,682	0,667	0,678
1,5	0,605	0,653	0,610	0,570	0,607
2,0	0,546	0,595	0,560	0,500	0,558

In Tabelle 3 ist die für den Wert 0,50 der Konstanten  $c$  berechnete Lichtverteilung angegeben. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung nicht so vollkommen wie im Fall B, aber bis zu 65 % für rohe Rechnungen genügend. Jetzt berechnen wir eine höhere Näherung. Die Rechnung ist viel einfacher als im Fall B, weil jetzt alle Differentialgleichungen und Integrationen leicht analytisch ausgeführt werden können.

Wenn die Neigung der Strahlen in Rechnung gezogen wird, finden wir für die Strahlungssumme  $y$  in der Tiefe  $x$ :

$$y = 2E_0 \left\{ \frac{\frac{2}{n\sqrt{3}} \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} - n\sqrt{3}}{n\sqrt{3} + 2} \cdot e^{-n\sqrt{3}x} + 1 + \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} x \right\},$$

wo

$$n = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\kappa_0}}. \quad (2)$$

Aus diesem Ausdruck kann man sogleich durch Nullsetzen von  $x$  die an der Oberfläche austretende Intensität ableiten. Das numerische Resultat ist in Spalte 3 der Tabelle 3 angegeben.

Schließlich erhalten wir eine höhere Annäherung für die Strahlung im Zentrum der Scheibe, wenn wir von der ursprünglichen Differentialgleichung

Die Profile der äußeren Teile der starken FRAUNHOFERSchen Linien. 45

ausgehen und diese wegen des verhältnismäßig großen Wertes von  $q$  vereinfachen:

$$\frac{dI}{dx} = n^2 I - \left(1 + \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} x\right) E_0 - \frac{n^2 - 1}{2} y.$$

Die austretende Strahlung findet man dann durch Einsetzen von (2) und Integration:

$$I_{x=0} = E_0 \left\{ 1 + \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} \frac{1}{n^2} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + n\sqrt{3}} \cdot \frac{2 \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0} - 3n^2}{3n^2 + 2n\sqrt{3}} \right\}.$$

Im Kontinuum wird

$$I = E_0 \left(1 + \frac{c\bar{\kappa}}{\kappa_0}\right) = 2,5 E_0;$$

und für die relative Intensität in der Linie erhält man die Zahlen, welche in der Spalte 4 der Tabelle 3 angegeben sind.

Das Resultat der exakten Berechnung unterscheidet sich fast nicht von der Näherung PANNEKOEKS und läßt sich ebenfalls roh durch die einfache SCHUSTERSche Formel darstellen, welche jetzt mit dem richtigen Wert der Konstanten lautet:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{1 + 0,50 \sigma/\kappa_0}. \quad (3)$$

Eine bis zu 55 % fast vollkommene Darstellung erhält man mit der empirischen Formel:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1 + 0,26 \sigma/\kappa_0}{1 + 0,86 \sigma/\kappa_0}. \quad (4)$$

*Fall C: Die Konzentration ist dem Elektronendruck umgekehrt proportional.* Dieser Fall unterscheidet sich nach den Rechnungen PANNEKOEKS so wenig vom Fall B, daß wir annehmen können, der Unterschied sei auch in höheren Annäherungen zu vernachlässigen.

## 2. Die Bestimmung des kontinuierlichen Grundes an gemessenen Linienprofilen.

Wir wollen jetzt diese Resultate auf starke FRAUNHOFERSche Linien anwenden, welche praktisch allein durch Strahlungsdämpfung entstehen. In diesem Falle sind der Streukoeffizient  $s_0$  wie auch  $\sigma$  und die Größe  $\sqrt{\alpha}$  proportional  $1/\Delta^2$ , wenn  $\Delta$  den Abstand von der Eigenfrequenz in irgendeiner Einheit bezeichnet. Die direkt gemessene Intensität sei durch die Funktion  $i(\Delta)$  dargestellt. Die unbekannt wahre Intensität des kontinuierlichen Grundes sei  $i_0$ , oder besser  $i_0 + m\Delta$ , um eine mögliche Änderung

der Intensität oder der Plattenempfindlichkeit, welche wir in diesem Gebiet als linear annehmen, zu berücksichtigen<sup>1)</sup>.

*Fall B und C.* Nach der Theorie von § 1, Gleichungen (1) und (3) wird

$$\frac{i}{i_0 + m \Delta} = \frac{1}{1 + c/\Delta^2}, \quad \text{und} \quad i - m \Delta = i_0 - c \frac{i}{\Delta^2}. \quad (5)$$

Die Korrektionsgröße  $m$  kann leicht aus zwei in größerer Entfernung zu beiden Seiten der Linie befindlichen Punkten bestimmt werden. Die gra-

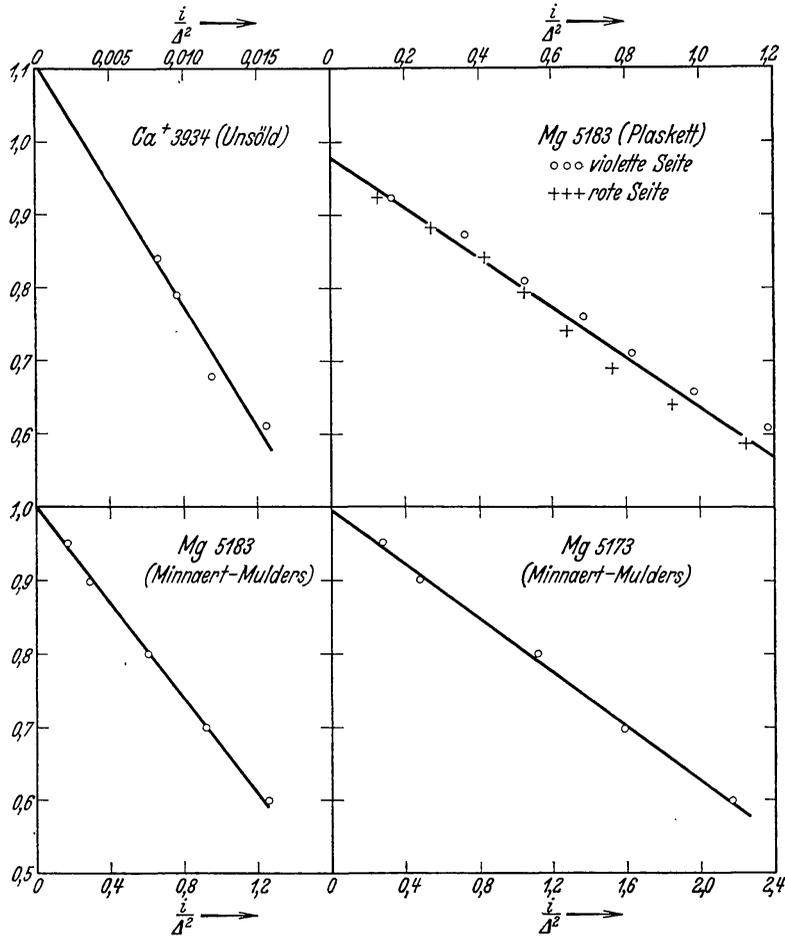


Abb. 1.

phische Darstellung von  $i - m \Delta$  als Funktion von  $i/\Delta^2$  muß also eine gerade Linie werden; ihre Schnittpunkte mit den Achsen bestimmen  $i_0$  und  $c$ . Wenn die beiden Flügel der Linie nicht ganz gleiche Werte von  $i_0$  ergeben, ändern wir  $m$  ein wenig, bis die Schnittpunkte zusammenfallen. Aus dem Wert von  $c$  folgt  $1/\sqrt{\alpha} = 1,33 c/\Delta^2$ .

<sup>1)</sup> Den Vorschlag, diese Korrektur einzuführen, verdanke ich Herrn Dr. G. F. W. MULDER.

In der Abb. 1 sind einige Beispiele solcher Reduktionen an früher publizierten Zahlen dargestellt<sup>1)</sup>. Überall ist  $\Delta$  in Ångström gemessen. Die Messungen UNSÖLDS an der K-Linie zeigen, wie nützlich die Methode für solche sehr starke Linien ist. Die Magnesiumlinie  $\lambda$  5183 von PLASKETT zeigt eine Neigung des Kontinuums, und zwar ist  $m = 0,005$ ; der kleine Unterschied des  $c$ -Wertes der beiden Flügel ist nicht gut verständlich. Die Messungen von MINNAERT und MULDEERS an den Magnesiumlinien  $\lambda$  5183 und  $\lambda$  5173 stimmen gut mit der Theorie, die beiden Flügel wurden aber nicht gesondert gemessen.

Der Vergleich mit der theoretischen Linienform beweist, wie schwer es sein dürfte, die Flügel der starken Linien allein auf Grund der Messungen genau in Rechnung zu ziehen. Beispielsweise findet man in Tabelle 4, berechnet nach Formel (5), welchen Fehler man in der Bestimmung der Intensität für die Linie K macht, wenn man mit der Messung nur bis zu einem endlichen Abstand  $\Delta$  (einseitig gemessen) von dem Linienzentrum geht und die Intensität an dieser Stelle als kontinuierlichen Grund betrachtet. Der Fehler in der äquivalenten Breite ist in der nächsten Spalte 3 angegeben: das Areal wird zu klein gemessen, und der Fehler wird nur zu einem kleinen Teil dadurch kompensiert, daß die Hintergrundintensität gleichfalls unterschätzt wird. Für die Angaben in der ersten Spalte wurde die Konstante  $c$  der K-Linie gleich der runden Zahl 30 angenommen; die Zahlen der anderen Spalten sind von dieser speziellen Wahl unabhängig und gelten für alle starken Linien.

Tabelle 4.

$\Delta$ (einseitig)	Wahres $i/i_0$	Scheinbare äquivalente Breite	$\Delta$ (einseitig)
		Wahre äquivalente Breite	Ganze scheinbare äquivalente Breite
5,48 Å	0,50	0,370	0,87
10,9	0,80	0,560	1,14
16,4	0,90	0,672	1,42
27,4	0,96	0,782	2,04
54,8	0,99	0,872	3,65
109	0,997	0,940	6,76
164	0,999	0,958	10,0
274	1,000	0,975	16,4
548	1,000	0,987	32,3

<sup>1)</sup> UNSÖLD, ZS. f. Phys. **46**, 765, 1927; PLASKETT, M. N. **91**, 870, 1931; MINNAERT u. MULDEERS, ZS. f. Ap. **1**, 192, 1930. Von UNSÖLDS Profil wurde nur der kurzwellige Flügel benutzt. Vielleicht wäre es besser, beide Flügel zu verwenden und für den Einfluß der benachbarten H-Linie zu korrigieren; man erhält dann  $i_0 = 1,05$  und  $c = 29,3$ .

Man sieht, daß es kaum möglich ist, genügend weit zu photometrieren. Darum dürfte es in solchen Fällen empfehlenswert sein, die direkten Meßresultate nur bis  $i/i_0 = 0,90$  oder  $0,95$  zu verwenden und das Areal eines jeden Flügels nach der Formel

$$I_{\Delta}^{\infty} = \int_{\Delta}^{\infty} \frac{c}{c+x^2} dx = \sqrt{c} \left( \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \frac{\Delta}{\sqrt{c}} \right)$$

zu berechnen.

Die letzte Spalte 4, welche gleich für den praktischen Gebrauch geeignet ist, zeigt, daß man nach jeder Seite wenigstens über das 20fache

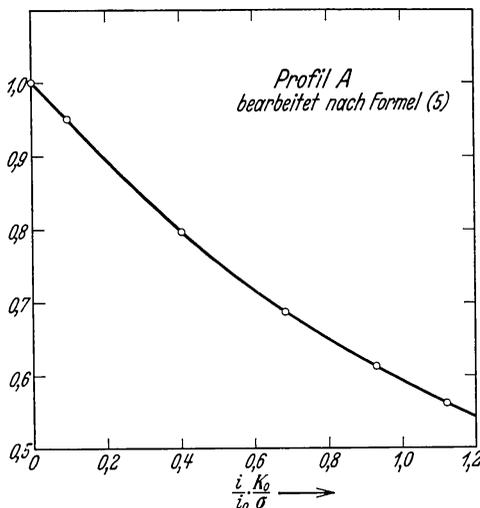


Abb. 2.

der äquivalenten Breite photometrieren muß, um den Fehler in der äquivalenten Breite auf 2% herunterzudrücken; in Verbindung mit Spalte 3 gibt sie auch eine Schätzung der anzubringenden Korrektur.

*Fall A.* Die Anwendung der graphischen Darstellung, welche für Fall B gültig ist, würde jetzt keine Gerade, sondern eine schwach gekrümmte Linie ergeben (Abb. 2). Eine befriedigendere Lösung leitet man aus Gleichung (4) ab:

$$\begin{aligned} i - m \Delta &= i_0 - 0,86 \frac{\sigma}{\kappa_0} (i - 0,30 i_0 - 0,30 m \Delta) \\ &= i_0 - \frac{c'}{\Delta^2} (i - 0,30 i_0 - 0,30 m \Delta). \end{aligned} \quad (6)$$

Die Größe  $i - m \Delta$ , als Funktion von  $\frac{i - 0,30 i_0 - 0,30 m \Delta}{\Delta^2}$  gezeichnet, muß also eine gerade Linie werden, deren Schnittpunkt mit der einen Achse  $i_0$ , und dessen Neigung  $c'$  ergibt. Hieraus folgt dann  $\sigma/\kappa_0 = 1,16 c'/\Delta^2$ . Für die äquivalente Breite findet man durch graphische Integration:  $2,11 \sqrt{c'}$ .

Die  $D$ -Linien, welche für diesen Fall ein gutes Beispiel sind, wurden von KORFF mit einer vorzüglichen Apparatur gemessen<sup>1)</sup>. Die graphische Darstellung nach der hier vorgeschlagenen Methode zeigt ausgezeichnete

<sup>1)</sup> Astrophys. Journ. 76, 291, 1932.

Übereinstimmung für  $D_1$ , unbefriedigende Übereinstimmung für  $D_2$ , welche doch besser zu messen sein müßte. Wir schließen also, daß die Genauigkeit der Messungen für diese Linien nicht genügend ist, um den Unterschied

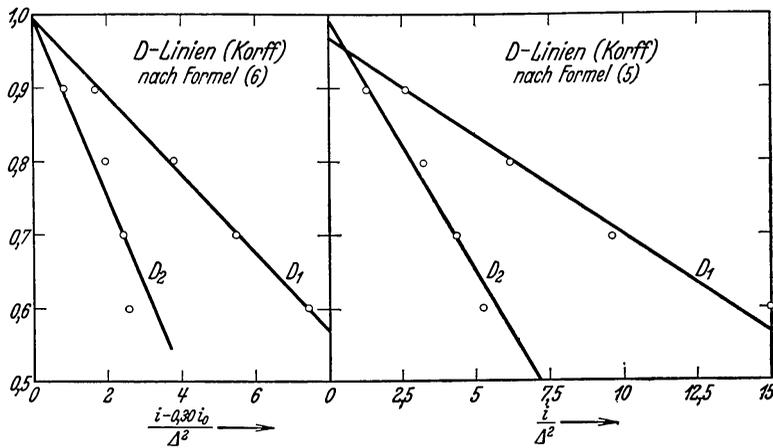


Abb. 3.

gegenüber Fall B sicherzustellen (Abb. 3). Die daraus folgende Unsicherheit in der Bestimmung der Konstanten wird durch die graphische Methode zwar augenfällig, aber nicht größer als bei jeder anderen Anpassungsweise.

### 3. Die Berechnung der Anzahl Resonatoren.

Um die Anzahl Resonatoren zu bestimmen, welche eine gegebene FRAUNHOFER'sche Linie erzeugt, verfügen wir hauptsächlich über zwei Methoden: 1. die Untersuchung der Flügelform; 2. die Messung des totalen Areals des Profils. In beiden Fällen braucht man nicht nur das Resultat der Messung, sondern noch die aus theoretischen Betrachtungen abgeleitete Kenntnis der Dämpfungskonstanten. Die erste Methode erfordert einen Spektrographen hohen Auflösungsvermögens, die zweite ist im Prinzip mit allen Apparaten und mit den schwächsten Linien durchzuführen. Dagegen ist die theoretische Begründung der ersten Methode beim heutigen Stande unserer Kenntnis wahrscheinlich besser gesichert als die der zweiten, welche durch die unsichere Erklärung der hohen Intensitäten im Zentrum der Linie etwas beeinflußt wird.

Wir wollen nacheinander beide Methoden auf einige starke Linien anwenden, deren Flügel sicher nicht durch den Spektralapparat verzerrt und der reinen Dämpfung zuzuschreiben sind. Eine FRAUNHOFER'sche Linie kann als nur durch Dämpfung verbreitert betrachtet werden, wenn ihre äquivalente Breite für  $\lambda$  4500 wenigstens etwa  $0,45 \text{ \AA}$  beträgt;  $0,3 \text{ \AA}$  an dem

violetten und  $0,9 \text{ \AA}$  an dem infraroten Ende des Spektrums sind also die erforderlichen Minimalwerte. Die  $D$ -Linien des Natriums sind noch gerade breit genug. Die Wasserstofflinien kommen nicht in Betracht, weil da Starkeffekte oder starke Fluoreszenz die Hauptrolle spielen. Die Linie  $H$  von  $\text{Ca}^+$  wurde nicht untersucht, weil sie durch das Zusammenfallen mit der Wasserstofflinie  $H_\epsilon$  verzerrt sein kann. In den Fällen, wo die graphische Methode von § 2 merkliche Abweichungen von der durch die Autoren selbst geschätzten Hintergrundsintensität gegeben hat, sind sowohl die Resultate aus den ursprünglichen als aus den nach § 2 reduzierten Zahlen mitgeteilt.

Tabelle 5.

Linie	Autor	$c$	Äquivalente Breite berechnet aus $\pi \sqrt{c}$	Äquivalente Breite gemessen	Ver- hältnis
Ca <sup>+</sup> 3934	SCHWARZSCHILD	42,6 $\text{\AA}^{-2}$	20,5 $\text{\AA}$	19,1 $\text{\AA}$	1,07
	UNSÖLD red.	35,5	18,8	17,4	1,08
	„ nicht red.	25,0	15,7	14,6	1,08
	MINNAERT red.	27,3	16,5	15,4	1,07
Ca <sup>+</sup> 8542 8662 8498	MULDERS *)	1,80	4,22	3,44	1,23
	„	1,03	3,19	2,64	1,20
	„	1,24	1,54	1,18	1,30
Mg 5183	PLASKETT	0,35	1,86	1,74	1,07
	KORFF red.	0,28	1,65	1,51	1,09
	„ nicht red.	0,24	1,53	1,37	1,12
	MINNAERT-MULDERS	0,32	1,80	1,68	1,07
Mg 5173	PLASKETT	0,198	1,40	1,24	1,13
	KORFF red.	0,163	1,27	1,17	1,09
	„ nicht red.	0,143	1,19	1,09	1,10
	MINNAERT-MULDERS	0,182	1,34	1,24	1,08
		$c'$	Berechnet aus $2,11 \sqrt{c'}$		
Na 5896 5890	KORFF	0,054	0,49	0,46	1,06
	„	0,120	0,73	0,76	0,96

\*) Noch nicht publizierte Messungen.

Zum Vergleich der zwei Methoden vergleichen wir das gemessene Areal mit dem Areal, welches aus der Flügelform als  $\pi \sqrt{c}$  theoretisch berechnet wird. Wir sehen, daß die ersten Areale *systematisch kleiner* sind als die zweiten<sup>1)</sup>. Mit anderen Worten: die zentralen Teile der Linien sind weniger

<sup>1)</sup> Wir haben uns davon überzeugt, daß die Diskrepanz keineswegs durch den Unterschied zwischen der exakten Theorie und Formel (1) erklärt werden kann.

tief, als man aus der Theorie schließen würde. Das ist also eine Bestätigung des bekannten Widerspruchs zwischen Theorie und Beobachtung für die zentralen Teile der Linie, und zwar scheint diese Feststellung besonders vertrauenswürdig, weil ein ungenügendes Auflösungsvermögen des Spektrographen im zentralen Teile der Linie hier keine Rolle spielt.

Es scheint, daß die Abweichung zwischen beiden Methoden bei den verschiedenen Linientypen eine verschiedene ist, wie es deutlich an den *PD*-Linien vom  $\text{Ca}^+$  zu sehen ist. Jedoch scheint aus dem allerdings beschränkten Material wohl zu folgen, daß das Verhältnis nicht systematisch von der Linienstärke abhängt und etwa zwischen 1,06 und 1,30 variiert. Es wäre besonders erfreulich, wenn die Methode der äquivalenten Breite, welche auf alle Linien angewandt werden kann, schon mit unseren heutigen Theorien Resultate geben würde, welche für die ganze Intensitätsskala nur unbedeutend von den richtigen Werten für die Resonatoranzahlen abweichen.

Herrn Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN danke ich ergebenst für sein Interesse an dieser Untersuchung.