

(Mitteilung aus dem Heliophysikalischen Institut des Physikalischen  
Laboratoriums Utrecht.)

## Zur Theorie der Sonnenflecke.

Von **M. Minnaert** und **A. J. M. Wanders**.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 23. September 1932.)

In der Annahme, daß die Sonnenflecke als aufsteigende Gase aufzufassen sind, die expandieren und abkühlen, und unter Berücksichtigung der Durchsichtigkeit dieser Gase, haben wir die Strahlung berechnet, die aus dem Fleck heraustreten muß (§ C). — Es ergibt sich, daß das Intensitätsverhältnis Fleck/Photosphäre viel langsamer mit der Wellenlänge wächst, als die Beobachtungen zeigen; auch sollte dieses Verhältnis schnell nach dem Rande der Sonnenscheibe hin abnehmen müssen, was ebensowenig mit den experimentellen Daten verträglich ist. — Es wird versucht, die adiabatische Theorie zu verfeinern. Dazu wurden folgende Einflüsse geprüft: 1. Korrektur für tiefere Photosphärenschichten, die quer durch den Fleck hindurch sichtbar sein könnten; 2. veränderlicher Absorptionskoeffizient; 3. Einfluß der Ionisation des Wasserstoffs auf die Temperatur der aufsteigenden Gase; 4. Einfluß des Strahlungsdrucks auf das konvektive Gleichgewicht. — Diese verschiedenen Abänderungen zeigten jedoch entweder nur geringen Einfluß, oder sie führten zu noch erheblicheren Diskrepanzen zwischen Theorie und Beobachtung. Eine merkwürdige Übereinstimmung mit allen zur Verfügung stehenden Daten ergibt sich, wenn man *statt konvektiven Gleichgewichts reines Strahlungsgleichgewicht* in den optisch zugänglichen Teilen des Flecks annimmt. — Es läßt sich hieraus sogleich eine effektive Temperatur von etwa  $4300^{\circ}$  für den Fleck ermitteln. Mit dieser Hypothese verträgt sich auch der sonst rätselhafte Umstand, daß aufsteigende Strömungen in den zentralen Teilen der Umbra noch nie beobachtet wurden.

### A. Einleitung.

Nach der heute wohl allgemein anerkannten Theorie RUSSELLS sind die Sonnenflecke entstanden durch adiabatisch sich ausdehnende Gasmassen, die von einer gewissen Tiefe in der Sonne aufzusteigen angefangen haben. Der Temperaturgradient, der bei solcher adiabatischen Ausströmung auftritt, ist größer als der des umgebenden Strahlungsgleichgewichtes der Photosphäre, so daß im Fleck eine Abkühlung stattfinden muß, wodurch dieser dunkler als die Umgebung wird.

Es ist nicht unwichtig, die Konsequenzen zu verfolgen, zu denen diese Theorie führt angesichts folgender detaillierteren experimentellen Daten:

a) die Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre von der Wellenlänge (im folgenden kurz mit *Wellenlängenabhängigkeit* bezeichnet);

b) die Änderung des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre mit zunehmendem Abstand vom Zentrum der Sonnenscheibe (*Winkelabhängigkeit*).

Ein Vergleich mit den Beobachtungen wird zeigen, inwieweit das übliche theoretische Modell der Flecke in Wirklichkeit zutrifft. Außerdem dürfte das Resultat auch allgemeineren Wert haben, als *Untersuchung der Strahlung der Sonnenatmosphäre in adiabatischem Gleichgewicht*, also in einem scharf bestimmten, extremen Zustande, der dem Strahlungsgleichgewicht gegenüber zu stellen ist. Selbst bei Änderungen in den experimentellen Daten würden aus unseren Rechnungen gleich neue Schlüsse zu ziehen sein, während auch die Möglichkeit einer Anwendung auf andere Sonnenstrukturen (Fackeln, Granulation, Flocculi) nicht ausgeschlossen ist.

### B. Experimentelle Daten.

So zahlreich die Intensitätsbestimmungen sind, die sich auf die Photosphäre beziehen, so selten sind die Intensitätsmessungen an Flecken.

a) Beobachtungen über die *Wellenlängenabhängigkeit* wurden nur vorgenommen von C. G. ABBOT<sup>1)</sup> im Jahre 1905, mit dem Spektrobolometer, und im Jahre 1922 von E. PETTIT und S. B. NICHOLSON<sup>2)</sup> mit Monochromator und Thermoelement. Ihre Messungen, die untereinander ziemlich gut übereinstimmen, sowie die durch sie gelegte mittlere Kurve findet man in Abb. 1 (nach PETTIT und NICHOLSON, l. c.). Die fünf offenen Kreise  $\circ$  sind die Beobachtungen von ABBOT<sup>3)</sup>.

Im Infrarot wie auch im Ultraviolett war die Farbenkorrektur des PETTIT- und NICHOLSONSchen Objektivs unbekannt, so daß die genaue Fokussierung nicht vorgenommen werden konnte. Daher verläuft nach den beiden Forschern die ausgezogene Kurve *links von  $0,4 \mu$  und rechts von  $0,8 \mu$  wahrscheinlich etwas zu hoch*.

Wichtiger wäre aber die Korrektur für die in der irdischen Atmosphäre und in der Apparatur zerstreute Strahlung (etwa 8% des Gesamtphotosphärenlichtes). Um diesen Betrag wurden aber die Beobachtungen von PETTIT und NICHOLSON nicht verbessert. Bei ABBOTS Messungen mit dem

<sup>1)</sup> C. G. ABBOT, Ann. Astr. Obs. Smith. Inst. **2**, 233, 1908; The Sun, 1929, S. 203.

<sup>2)</sup> E. PETTIT u. S. B. NICHOLSON, Ap. J. **71**, 153, 1930.

<sup>3)</sup> Die beiden Einsenkungen bei  $1,4$  und  $1,9 \mu$ , gerade an der Stelle, wo sich die atmosphärischen Wasserdampfbanden  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{Q}$  befinden, sind wohl nicht reell, sondern vielmehr den Fehlern zuzuschreiben, die auf irgendeine Weise durch diese starken Absorptionsbanden in der Messung der kleinen Intensitäten verursacht wurden.

Snowteleskop wurde die Größe dieser Einstrahlung überhaupt nicht bestimmt. Wir haben im folgenden angenommen, die Fleckintensitäten seien für alle Wellenlängen um rund 10 % der Photosphärenstrahlung zu verringern. Das heißt also, daß alle Ordinaten in Abb. 1 um 0,10 herabzusetzen sind.

*Auf diese reduzierte Kurve von PETTIT und NICHOLSON gründen sich die experimentellen Daten, die wir weiterhin benutzen werden.*

b) Exakte Angaben über die *Winkelabhängigkeit* stehen leider nicht zur Verfügung. Manche ältere Beobachter finden, daß der Helligkeits-

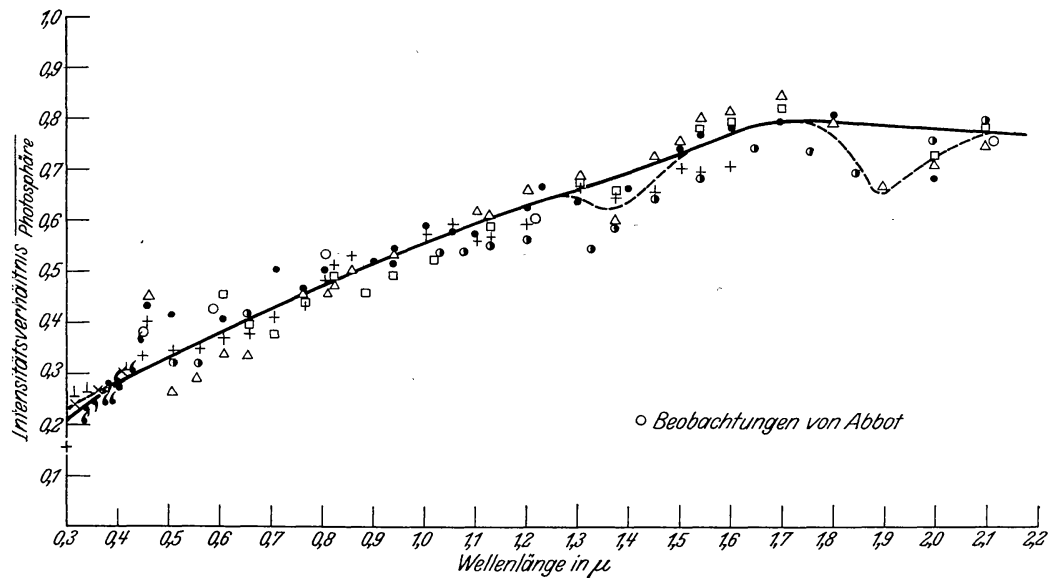


Abb. 1. Messungsergebnisse von Pettit und Nicholson für die Wellenlängenabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre.

kontrast zwischen Fleck und Photosphäre nach dem Rande hin abnimmt<sup>1)</sup>. Nach W. E. WILSON soll das Verhältnis Fleck—Photosphäre im Zentrum der Scheibe konstant bleiben bis auf 0,95 vom Mittelpunkt. K. SCHWARZSCHILD und W. VILLIGER<sup>2)</sup> beobachteten im Laufe des Jahres 1905 14 Flecke in verschiedenem Abstand vom Mittelpunkt, bei  $\lambda = 0,32 \mu$ . Aus ihren Resultaten ergab sich, daß für kleinere Flecke das Intensitätsverhältnis zur umgebenden Photosphäre von etwa 12 % (im Zentrum) bis auf 30 bis 50 % (am Rand) zunahm. Für größere Flecke aber blieb das Verhältnis nahezu konstant.

Eine Schwierigkeit bleibt bei allen Beobachtungen dieser Art der Umstand, daß die geringen Dimensionen, die die Umbra der meisten Flecke

<sup>1)</sup> Siehe hierzu C. G. ABBOT, *The Sun*, S. 204.

<sup>2)</sup> K. SCHWARZSCHILD u. W. VILLIGER, *Ap. J.* **23**, 345, 1906.

am Rand der Scheibe (infolge perspektivischer Verkürzung) nur noch hat, zu beträchtlichen systematischen Fehlern Anlaß geben müssen, nicht nur infolge des zerstreuten Lichtes, sondern auch wegen Szintillationserscheinungen. Letztere waren bei den Messungen von SCHWARZSCHILD und VILLIGER infolge der sehr kurzen Belichtungsdauer ( $1/50$  Sekunde) wahrscheinlich gering. Deshalb scheinen uns ihre Ergebnisse, zumal diejenigen bei größeren Flecken, wohl zuverlässig zu sein.

Es ist merkwürdig, daß für alle Beobachter der Helligkeitskontrast zwischen Fleck und umgebender Photosphäre nach dem Rand hin immerhin *nicht zunimmt*. Und dies scheint das einzige Resultat zu sein, das sich hier vorläufig aus der Beobachtung ergibt. Mit Rücksicht auf die Messungen von SCHWARZSCHILD und VILLIGER an größeren Flecken könnte man vielleicht noch hinzufügen, daß das Intensitätsverhältnis vom Zentrum bis zum Rande nahezu konstant bleibt. Jedenfalls wäre eine bedeutende Erweiterung des Beobachtungsmaterials sehr erwünscht, auch schon, um dem Einfluß der Fleckdimensionen auf den Kontrast nachgehen zu können. Mit solchen Beobachtungen wurde hier schon angefangen.

### C. *Adiabatische Theorie.*

H. N. RUSSELL<sup>1)</sup> war der erste, der die Formel des konvektiven Gleichgewichts auf die Sonnenflecke anwandte. Seine Berechnungen sind wohl genügend bekannt, weshalb wir sie hier nicht zu wiederholen brauchen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> H. N. RUSSELL, Ap. J. **54**, 293, 1921.

<sup>2)</sup> Man erlaube uns hier, folgende Bemerkung zu machen im Zusammenhange mit der Beziehung  $T \sim p^{1/4}$  ( $T$  = Temperatur,  $p$  = Gasdruck), die RUSSELL für das Strahlungsgleichgewicht der umgebenden Photosphäre benutzt. Tatsächlich darf in diesen oberflächlichen Schichten die Grenztemperatur  $T_g$  nicht vernachlässigt werden; und man hat die verwickeltere Beziehung zu benutzen, die aus

$$T^4 = T_g^4 (1 + \frac{3}{2} \tau) \quad \text{und} \quad p \sim \tau$$

folgt, nämlich:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2^4 - T_g^4}{T_1^4 - T_g^4},$$

wo die optische Tiefe  $\tau = \int k \rho dh$  ( $\rho$  = Dichte,  $k$  = Massenabsorptionskoeffizient und  $h$  = geometrische Tiefe in der Photosphäre); während die Indizes 1 und 2 sich auf zwei beliebige Niveaus beziehen. Dann verschwinden auch die erheblichen Unterschiede zwischen den Basisniveaus der Flecke, wie sie berechnet wurden von RUSSELL einerseits und von R. M. PETRIE (in M. N. **90**, 480 1930) andererseits. Die von PETRIE berücksichtigte Veränderlichkeit des Absorptionskoeffizienten ergibt sich somit als unwesentlich (wenigstens bei einer Berechnungsart wie der RUSSELLSchen; siehe aber unsere Ausführungen in den nächsten Paragraphen).

RUSSELL rechnet nun mit einer „sichtbaren Oberfläche“ im Fleck, welche dann eine Temperatur von etwa  $4000^{\circ}$  haben sollte.

Es ist naheliegend, im Fall der Fleckstrahlung ebenso wie bei der Photosphäre mit der *Durchsichtigkeit der Gase* zu rechnen, infolge deren wir nicht nur die Strahlung eines „effektiven Niveaus“ in unseren Instrumenten beobachten, sondern die Beiträge sehr verschiedener Schichten zunehmender Temperatur und Druckes.

a) *Verlauf des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre mit der Wellenlänge.* Wir denken uns den Fleck in der Mitte der Sonnenscheibe. Es ist dann die von jeder in der optischen Tiefe  $\tau$  befindlichen Schicht von Sonnengasen (mit der Temperatur  $T$ ) in radialer Richtung ausgesandte Energie zu multiplizieren mit dem Absorptionsfaktor  $e^{-\tau}$ , so daß im ganzen an Strahlung einer bestimmten Wellenlänge aus dem Fleck ein Betrag

$$J_{\lambda}^{\text{ad}}(0, 0) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^{\tau_0} \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_{\text{ad}}}} - 1} \quad (1)$$

heraustritt, wenn man, wie üblich,  $J(\tau, \Theta)$  schreibt für die Gesamtstrahlung, die durch ein Niveau auf der optischen Tiefe  $\tau$  in einer Richtung  $\Theta$  mit der Normale hindurchtritt, und wenn der Fleck von Niveau  $\tau_0$  aufsteigt. [Die PLANCKSchen Strahlungskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  haben die numerischen Werte  $c_1 = 3,703 \cdot 10^{-5}$  erg cm<sup>2</sup> sec<sup>-1</sup> und  $c_2 = 1,43$  cm Grad.]

In (1) ist  $T_{\text{ad}}$  eine Funktion von  $\tau$ , die wir nunmehr näher bestimmen wollen.

Wenn die adiabatisch aufsteigenden Gase ein Verhältnis  $\gamma$  der spezifischen Wärmen haben, so ist bekanntlich

$$T \sim p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Da weiter nach der RUSSELLSchen Annahme eines konstanten Absorptionskoeffizienten der Druck

$$p \sim \tau \quad (2)$$

ist, so ist auch

$$T \sim \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad *) \quad \left( \gamma = \frac{c_p}{c_v} \right). \quad (2')$$

---

\*) Wenn wir später zu einem veränderlichen Absorptionskoeffizienten übergehen, wird das einfache Gesetz (2') ein anderes. Wir können dennoch die Form (2') beibehalten; nur ist  $\gamma$  dann nicht mehr das Verhältnis der spezifischen Wärmen, sondern eine Zahl, die, wie wir sehen werden, auf einfache Weise mit diesem  $c_p/c_v$  zusammenhängt. Wir wollen dann aber  $\bar{\gamma}$  schreiben.

Wenn wir nun die verschiedenen Größen im Niveau, aus dem der Fleck aufsteigt, mit dem Index 0 versehen, dann gilt

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (3)$$

Das Niveau  $\tau_0$  bildet aber die Grenze zwischen adiabatischem Gleichgewicht im Fleck und Strahlungsgleichgewicht in der Photosphäre, demnach wird  $\tau_0$  bestimmt durch

$$T_0^4 = T_g^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0\right). \quad (4)$$

Hier ist die Grenztemperatur

$$T_g = T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \quad \text{und} \quad T_{\text{eff}} = 5740^\circ$$

nach MILNES Untersuchungen.

Aus (3) und (4) folgt nun

$$T_{\text{ad}} = C \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (5)$$

wo

$$C = \frac{T_0}{\left[\frac{2}{3} \left(\frac{T_0^4}{T_g^4} - 1\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \quad (6)$$

also nur eine Funktion der Basistemperatur  $T_0$ .

Das Fleckintegral (1) ist somit in Verbindung mit (5) und (6) für jedes  $\lambda$  zu berechnen<sup>1)</sup>. Und damit ist die Strahlungsintensität des Flecks für beliebige Wellenlängen als Funktion von  $T_0$  gefunden.

Für die Photosphärenintensität erhält man eine ähnliche Formel:

$$J_\lambda^{\text{rad}}(0,0) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_{\text{rad}}}} - 1}, \quad (7)$$

mit

$$T_{\text{rad}} = T_g \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right)^{1/4}. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Man bemerkt, daß das Integral von (1) eine Funktion des Produkts  $\lambda T$  ist, oder auch [s. Gleichung (5)] von  $\lambda C$ . Dieser Umstand bringt es mit sich, daß für andere geeignete Kombinationen von  $\lambda$  und  $C$ , derart, daß  $\lambda' C' = \lambda C$  ist, die Integralformen ihre numerischen Werte behalten, während man die Intensitäten bei neuen  $\lambda'$  erhält durch Multiplikation von (1) mit dem Faktor  $(\lambda/\lambda')^5$ . Dadurch wird der Übergang auf andere Anfangstemperaturen bedeutend vereinfacht.

Die Tiefe  $\tau_0$ , aus welcher die Fleckgase aufsteigen, konnte nun noch beliebig gewählt werden. Wir entschlossen uns, an die Beobachtungen anzuschließen und die Anfangstiefe je nach dem für  $\gamma$  angenommenen Wert so zu wählen, daß das Intensitätsverhältnis Fleck/Photosphäre immer bei  $\lambda 4800$  den Wert  $0,21_5$  erhielt (PETTIT und NICHOLSON). Die Integrationen (1) und (7) wurden graphisch ausgeführt, und alsdann wurde das Verhältnis  $J_{\text{ad}}/J_{\text{rad}}$  bestimmt. Das Resultat ersieht man in Abb. 2, wo die adiabatischen Kurven für die sechs Fälle der Tabelle 1 voll ausgezogen wiedergegeben sind.

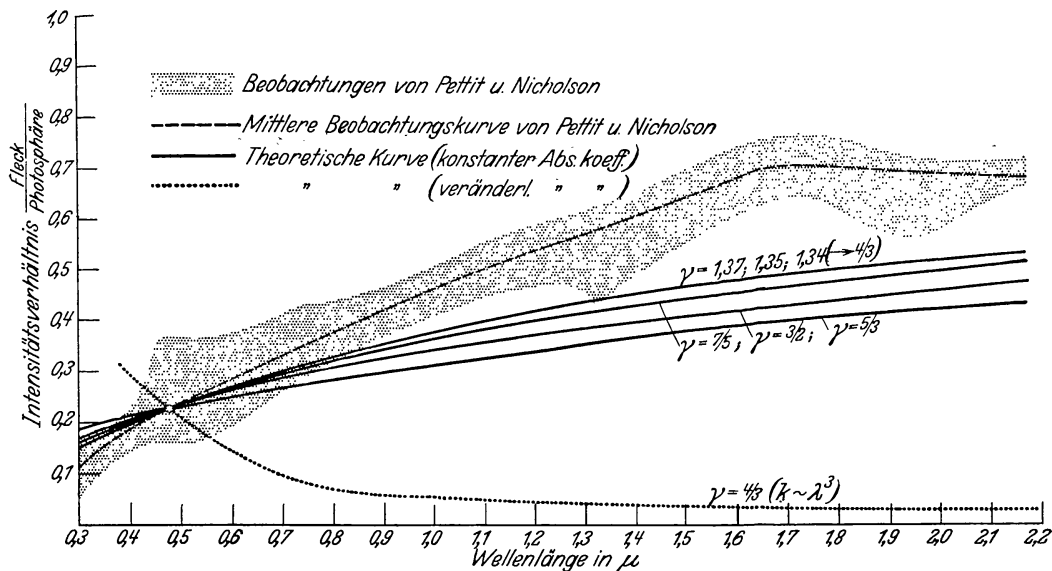


Abb. 2. Die Wellenlängenabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre nach der adiabatischen Theorie.  
Voll ausgezogene Kurven:  $k = \text{konstant}$  oder nur abhängig von  $p$  und  $T$ ,  
punktirt:  $k$  veränderlich mit  $\lambda$ .

Tabelle 1.

Basistemperaturen der Sonnenflecke in Abb. 2 (adiabatische Hypothese).

$\gamma$	$\frac{\gamma-1}{\gamma}$	$T_0$ Grad	$\tau_0$
5/3	0,40	9 150	8
3/2	0,33	11 200	19
7/5	0,29	21 700	270
1,37	0,27	200 000	$2 \cdot 10^6$
1,35	0,26	540 000	$2 \cdot 10^8$
1,34	0,25 <sub>6</sub>	$3 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{19}$

Aus den Berechnungen ergab sich, daß Niveaus auf größeren Tiefen als  $\tau \sim 8$  bis 10 keinen merklichen Beitrag mehr zum austretenden Lichte

lieferten. Die letzte Spalte der Tabelle zeigt, daß alle von uns betrachteten Flecke so tief sind, daß der Beobachter nicht quer hindurchsehen kann (vgl. § D).

Man sieht, daß, welchen Wert man nun auch für die Größe  $\gamma$  wählt, die theoretisch berechneten Kurven immer bedeutend flacher verlaufen als die experimentell gefundenen. Es ist wohl nicht möglich, diesen Unterschied durch systematische Beobachtungsfehler zu erklären. Was die Wellenlängenabhängigkeit betrifft, gibt somit die *adiabatische Theorie keine befriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.*

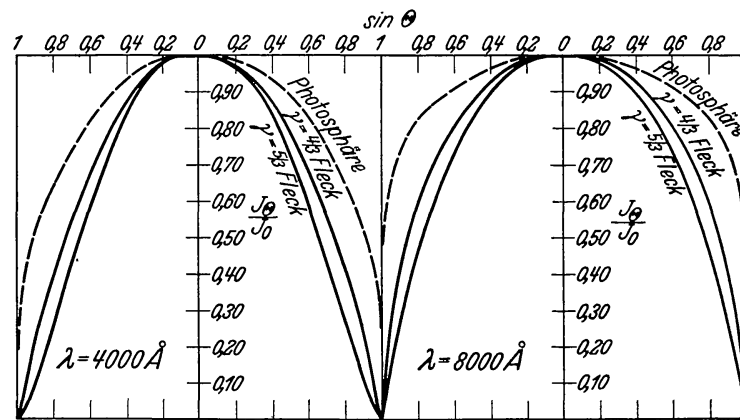


Abb. 3. Intensitätsverteilung auf der Sonnenscheibe nach der adiabatischen Theorie.

b) *Abfall des Intensitätsverhältnisses nach dem Rand.* Befindet sich der Fleck nicht in der Mitte der Sonnenscheibe, sondern exzentrisch, und treten die Strahlen demnach statt radial, unter einem gewissen Winkel  $\Theta$  mit der Normale auf der Sonnenoberfläche aus, so ändert sich das Integral (1) bekanntlich in

$$J_{\lambda}^{\text{ad}}(0, \Theta) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^{\tau_0} \frac{e^{-\tau \sec \Theta} \sec \Theta d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_{\text{ad}}}} - 1}, \quad (9)$$

wobei der bisherige Zusammenhang zwischen  $T_{\text{ad}}$  und  $\tau$  gemäß (5) gültig bleibt<sup>1)</sup>. In Abb. 3 findet man das Verhältnis  $\left[ \frac{J(0, \Theta)}{J(0, 0)} \right]_{\text{ad}}$  für den Fleck, für zwei Werte von  $\gamma$  und für zwei Wellenlängen. Zum Vergleich wurde

<sup>1)</sup> Für dieses Integral gilt eine ähnliche Transformationsmöglichkeit, wie sie für (1) angegeben wurde.



in derselben Figur mit punktierter Linie ebenfalls das Verhältnis  $\left[ \frac{J(0, \Theta)}{J(0, 0)} \right]_{\text{rad}}$  für die Photosphäre angegeben, wobei dann  $[J(0, \Theta)]_{\text{rad}}$  nach der Formel

$$J_{\lambda}^{\text{rad}}(0, \Theta) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau \sec \theta \sec \Theta} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_{\text{rad}}}} - 1} \quad (10)$$

bestimmt wurde, mit  $T_{\text{rad}}$  nach (8).

Aus der Abbildung erhellt sofort, daß der Kontrast zwischen Fleck und Photosphäre nach dem Rand hin schnell zunimmt, völlig im Gegensatz zu dem, was die Beobachtungen auszuweisen erscheinen. Jedoch nähern sich sowohl die Kurven der Wellenlängenabhängigkeit wie die der Winkelabhängigkeit merkwürdigerweise der Beobachtung schon etwas mehr, wenn  $\gamma$  sich dem Wert  $\frac{4}{3}$  nähert und die Flecke aus größerer Tiefe aufsteigen. Ein solcher Zustand der Gase würde eintreten bei sehr starker Einstrahlung; in mancher Hinsicht würde er annähernd dem Strahlungsgleichgewicht ähnlich werden.

#### D. Mögliche Abänderungen in der adiabatischen Theorie.

1. *Untiefe Flecke.* Bisher wurden die Basistemperaturen so gewählt, daß die berechnete Strahlung bei  $\lambda 4800$  mit der beobachteten übereinstimmte. Wenn wir diese Forderung fallen lassen und die Anfangstemperaturen, mit denen die Gase aufsteigen, tiefer wählen, wodurch die Flecke weniger tief werden als wir bis jetzt angenommen, so geht ein interessantes Element in unser Fleckenmodell hinein, daß nämlich der irdische Beobachter dann quer durch die adiabatische Säule hindurchschaut, und überdies noch einen merklichen Beitrag von den darunterliegenden Schichten im Strahlungsgleichgewicht zu sehen bekommt.

Um den richtigen Betrag der austretenden Strahlung zu erhalten, muß nunmehr die Integration (1) von  $\tau = \tau_0$  bis  $\tau = \infty$  (d. h. praktisch  $\tau \sim 10$ ) durch ein Integral über das anschließende photosphärische Strahlungsgleichgewicht ergänzt werden. Die gesamte austretende Energie einer bestimmten Wellenlänge wird jetzt gegeben durch

$$J_{\lambda}^{\text{Fleck}}(0, 0) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^{\tau_0} \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_{\text{ad}}}} - 1} + \frac{c_1}{\lambda^5} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_{\text{rad}}}} - 1}, \quad (11)$$

mit  $T_{\text{ad}}$  und  $T_{\text{rad}}$  nach (5) bzw. (8).

Das Ergebnis dieser Berechnungen für einige aus verschiedenem Niveau heraufsteigende Flecke enthält Abb. 4. Abb. 5 gibt den auftretenden Temperaturverlauf längs der Blicklinie in diesen drei Fällen.

Man bemerkt, daß, wie die Anfangstemperaturen und damit die Tiefen der Flecke auch gewählt werden, das Verhältnis Fleck/Photosphäre immer noch viel zu langsam mit der Wellenlänge wächst.

Diese Resultate gelten unterdessen nur für Fleckgase mit einem effektiven  $\gamma = 5/3$ . Natürlich würde auch für andere  $\gamma$ -Werte ( $3/2$ ,  $7/5$ ) eine ähnliche Korrektur für hinterliegendes Strahlungsgleichgewicht eintreten, wenn nur  $\tau_0$  genügend klein würde. In diesen Fällen (namentlich

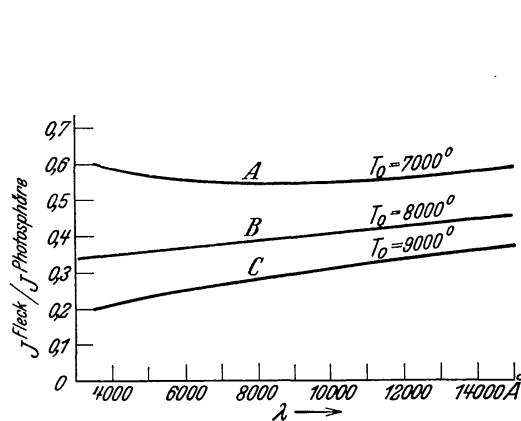


Abb. 4. Wellenlängenabhängigkeit nach der adiabatischen Theorie für Sonnenflecke geringer Tiefe.

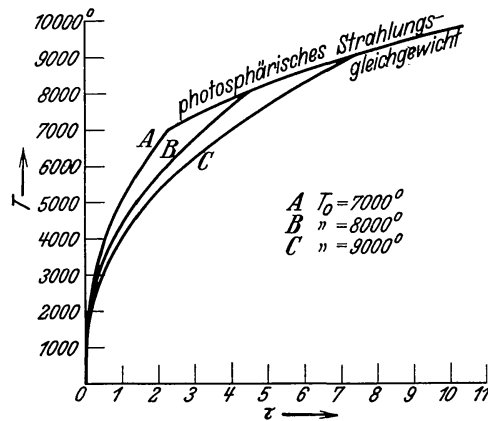


Abb. 5. Temperaturverlauf in den Flecken der Abb. 4.

für  $\gamma = 7/5$ ) ist der Temperaturgradient jedoch zu gering, um bei solchen sehr wenig tiefen Flecken in irgendeinem Spektralbereich noch die erwünschte Dunkelheit herbeizuführen.

2. *Veränderlicher Absorptionskoeffizient.* Die Proportionalität (2) zwischen  $p$  und  $\tau$  trifft nur dann zu, wenn der Absorptionskoeffizient  $k$  konstant ist; denn nur dann ist die ursprüngliche Beziehung

$$dp = \frac{g}{k} d\tau \quad (12)$$

unmittelbar zu integrieren zu  $p = g\tau/k$ .

Wir wollen diese Einschränkung jetzt fallen lassen und untersuchen, welchen Einfluß ein veränderliches  $k$  auf die Resultate beim adiabatischen Gleichgewicht hat.

In unserem Falle, wo wir die austretende Strahlung für jede Wellenlänge einzeln zu berechnen wünschen, haben wir mit dem „monochromatischen Absorptionskoeffizienten“  $k_\lambda$  zu rechnen<sup>1)</sup>. Dieser sieht wie folgt aus:

$$k_\lambda = A \lambda^3 \frac{P_e}{T} \quad (13)$$

(wo  $A$  eine Konstante ist), und hängt also ab sowohl von dem (Elektronen-) Druck  $P_e$  und der Temperatur  $T$ , wie von der Wellenlänge. Wir wollen diese beiden Einflüsse einzeln erörtern.

1) *Die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von  $p$  und  $T$ .* Nehmen wir ein konstantes Verhältnis zwischen Gas- und Elektronendruck im Fleck an (was in den oberen Schichten wohl erlaubt ist, da der Wasserstoff, aus dem die Fleckengase wesentlich zusammengesetzt sind, dort noch kaum zu ionisieren angefangen hat), so kann man allgemein

$$k = \alpha \frac{p^m}{T^n} \quad (14)$$

setzen, wo  $\alpha$ ,  $m$  und  $n$  Konstanten sind.

Die adiabatische Ausdehnung geschieht gemäß

$$p \sim T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (15)$$

so daß wir für

$$d\tau = \frac{k}{g} dp = \frac{\alpha}{g} \frac{p^m}{T^n} dp \quad (16)$$

schreiben können<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} d\tau &\sim p^{m-n} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) dp, \\ \tau &\sim p^{m+1-n} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Oder auch nach (15)

$$\tau \sim T^{(m+1)\frac{\gamma}{\gamma-1}-n}. \quad (18)$$

Weil nun der Faktor  $\gamma/(\gamma-1)$  im Durchschnitt etwa gleich 3 ist, geht aus dieser letzten Gleichung sofort hervor, daß der Einfluß des Exponenten  $m$  im Absorptionskoeffizienten bedeutend verstärkt wird.

<sup>1)</sup> J. A. GAUNT, Phil. Trans. (A) **229**, 163, 1930.

<sup>2)</sup> Man muß hier bedenken, daß  $\tau$  jetzt im Fleck ein anderes ist als in der Photosphäre, weil ja in beiden ein anderer Absorptionskoeffizient gilt, wodurch dieses  $\tau$  nach einem anderen Maß wie jenes gemessen wird. Allerdings hätten wir das  $\tau$  im Fleck von nun an etwa mit  $\tau^*$  bezeichnen sollen; da die beiden  $\tau$  von Photosphäre und Fleck in dieser Ziffer jedoch nicht nebeneinander vorkommen, erübrigt sich dieser Unterschied wohl.

Kehren wir nunmehr zu unserer Formel (13) zurück und setzen wir demnach  $m = 1$  und  $n = 3/2$ . Es wird dann

$$\tau \sim p^{\frac{\gamma+3}{2\gamma^*}} \quad (19)$$

und

$$T \sim \tau^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+3}}. \quad (20)$$

Letztere Beziehung zwischen  $T$  und  $\tau$  kann man nun in (1) einsetzen. Damit ist die Berechnung der Strahlung für veränderliches  $k$  nunmehr auf die schon früher für konstantes  $k$  ausgeführte zurückgeführt, jedoch unter der Bedingung, daß der Exponent  $(\gamma - 1)/\gamma$  in Gleichung (5) jetzt in den der Gleichung (20) abgeändert wird. Um nun den Einfluß des variablen Absorptionskoeffizienten auf die Beschaffenheit unserer früher berechneten adiabatischen Kurven leicht verfolgen zu können, wollen wir auch (20) in der Form

$$T \sim \tau^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}} \quad (21)$$

schreiben, wobei die Zahl  $\bar{\gamma}$  (eine Art Pseudo- $\gamma$ ) definiert wird durch die Beziehung

$$\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+3}.$$

Untenstehende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen  $\bar{\gamma}$  und  $\gamma$ , in Verbindung mit dem Exponenten von  $\tau$  in (20) oder (21).

Tabelle 2.

Pseudo- $\gamma$ $\bar{\gamma}$	Exponent von $\tau$ in (21), also $\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}$ oder $\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+3}$	$\gamma$	Bemerkungen
5/3	0,40	2	} Aus physikalischen } Gründen nicht möglich
3/2	0,33	1,8	
7/5 = 1,4	0,29	5/3 = 1,67	
1,37	0,27	1,62 <sub>5</sub>	
1,35	0,26	1,60	
4/3 = 1,33	0,25	1,57	

Im Anschluß an diese Tabelle möchten wir folgendes bemerken:

a) Erstens ist  $\gamma = c_p/c_v$ , und somit kann es höchstens  $= 5/3$  sein; die Werte der ersten zwei Zeilen sind daher nicht realisierbar.

\*) Aus (19) geht hervor, daß der Exponent von  $p$  annähernd gleich 1,5 geworden ist; bei konstantem  $k$  war er gleich 1.

b) Wenn  $1,57 < \gamma < 1,67$  ist, bleibt  $\bar{\gamma} > 4/3$ ; und weil  $\bar{\gamma}$  den Exponenten in Gleichung (20) bestimmt und damit bekanntlich den Temperaturgradienten, wird der Fleck dunkel erscheinen. Die Kurven der Wellenlängenabhängigkeit sind dann dieselben, die wir schon bei konstantem  $k$  fanden (Abb. 2), und die wir, als nicht hinreichend mit den Beobachtungen in Übereinstimmung, verworfen haben.

c) Ist  $\gamma < 1,57$ , so wird  $\bar{\gamma} < 4/3$ , und die aufsteigende Gassäule wird heller als die Umgebung erscheinen. Es handelt sich in diesem Fall natürlich nicht mehr um eine Theorie der Flecke; höchstens könnte man hier Ausgangspunkte für eine Theorie der *Fackeln* suchen.

Das Ergebnis, daß eine Gassäule, die in aufsteigende Bewegung gelangt, ebenso gut heller wie dunkler werden kann, ist tatsächlich interessant! Solange wir voraussetzten, daß  $k$  konstant sei, hatte das Aufsteigen nur zur Folge, daß auf jedem Niveau die Temperatur tiefer geworden war, die Strahlung somit geringer; die Lichtschwächung durch die höher liegenden Schichten war aber dieselbe geblieben. Nachdem wir nun berücksichtigt haben, daß der Absorptionskoeffizient bei abnehmendem Druck abnimmt, finden wir, daß die durch das Aufsteigen erfolgte Temperaturabnahme mit zunehmender Durchsichtigkeit der Gase verknüpft ist, wodurch man tiefere (heißere) Schichten als früher sehen kann. Je nachdem  $\gamma$  größer oder kleiner ist, wird der eine oder der andere Effekt vorwiegend sein.

Obwohl das eigentliche Verhältnis  $c_p/c_v$  für das Fleckengas annähernd gleich  $5/3$  sein muß, ist es doch wahrscheinlich, daß man den Einfluß von Einstrahlung und Rekombination darstellen kann durch ein „effektives“  $\gamma$  von erheblich tieferem Wert. Von dem Einfluß dieser Faktoren würde es dann abhängig sein, ob die aufsteigende Säule heller oder dunkler erscheint.

2) Die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von  $\lambda$ . Bis hierher haben wir verzichtet auf den zweiten Einfluß, der sich in unserem veränderlichen Absorptionskoeffizienten geltend macht, nämlich den der Wellenlänge. Der Faktor  $\lambda^3$ , der theoretisch in die Formel für  $k$  eingeht, ist aber schwer zu vereinbaren mit der Bandverdunklung der Sonne und ihrer Energiekurve, welche nur dann zu erklären sind, wenn  $k$  von der Wellenlänge unabhängig ist. Nimmt man jedoch an, daß der Faktor  $\lambda^3$  reell ist, so läßt sich leicht zeigen, daß die adiabatischen Kurven noch weniger steil verlaufen werden, als wenn  $k$  von der Wellenlänge unabhängig wäre.

Setzen wir nämlich den Ausdruck (13) für  $k$  in (16) ein, so wird statt (21)

$$T^{\bar{\gamma}-1} \sim \frac{1}{\lambda^3} \tau. \quad (22)$$

Abermals gibt es somit in der Gassäule Proportionalität zwischen  $T$  und  $\tau^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}}$ , und wir können analog (5) schreiben

$$T = C_\lambda \tau^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}}, \quad (23)$$

wobei dann anstatt (6) jetzt

$$C_\lambda = \frac{f(T_0)}{\lambda^{\frac{3(\bar{\gamma}-1)}{\bar{\gamma}}}}$$

wird. Nun steht im Nenner des Integranden von (1) als Exponent das Produkt

$$\lambda T = \lambda C_\lambda \tau^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}},$$

wobei

$$\lambda C_\lambda = \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{3(\bar{\gamma}-1)}{\bar{\gamma}}}} f(T_0)$$

wird. Solange  $k$  von  $\lambda$  unabhängig war, erhielt der Ausdruck  $\lambda C$  etwa die Form

$$D \lambda \tau^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}}. \quad (24)$$

Weil nun aber  $\frac{7}{5} > \bar{\gamma} > \frac{4}{3}$  ist, hat  $3(\bar{\gamma}-1)/\bar{\gamma}$  Werte zwischen  $\frac{6}{7}$  und  $\frac{3}{4}$ ; mithin ist das Produkt jetzt nicht mehr proportional zu  $\lambda$ , sondern zu einer  $\lambda$ -Potenz zwischen  $\lambda^{1/4}$  und  $\lambda^{1/7}$ . Der größte Exponent von  $\lambda$  tritt auf, falls  $\bar{\gamma} = \frac{4}{3}$ . Dann zeigt  $\lambda C_\lambda$  etwa die Form

$$E \lambda^{1/4} \tau^{\frac{\bar{\gamma}-1}{\bar{\gamma}}}. \quad (25)$$

Durch Vergleich mit (24) zeigt sich nun sofort, daß, wenn die beiden Ausdrücke  $\lambda C$  für irgendeinen Wert von  $\lambda$  (z. B. wieder für  $\lambda 4800$ ) einander gleichgemacht — die Kurve bei jener Wellenlänge somit den Beobachtungen angepaßt wurde — der Ausdruck (25) für eine größere Wellenlänge kleiner ist als (24), so daß wirklich die Fleckeneergie kleiner ausfällt, als wenn  $k$  unabhängig von  $\lambda$  wäre. Die neuen Kurven, die bei Berücksichtigung des Faktors  $\lambda^3$  in  $k$  entstehen, verlaufen somit tatsächlich noch flacher als die adiabatischen für dasselbe  $\gamma$ , aber ohne Rücksicht auf den Faktor  $\lambda^3$ .

In Abb. 2 wurde auch die Kurve für  $\bar{\gamma} = \frac{4}{3}$  bei veränderlichem  $k$  eingezeichnet. Wie man bemerkt, ist die Krümmung sogar eine ganz andere geworden: sie verläuft konvex gegen die  $\lambda$ -Achse.

Man könnte einwenden, daß eine  $\lambda$ -Abhängigkeit von  $k$  auch bei der Berechnung des Strahlungsgleichgewichts berücksichtigt werden sollte. Dann würde aber die schöne Übereinstimmung zwischen theoretischer und beobachteter Photosphärenhelligkeit ganz gestört, während jetzt die berechnete Photosphärenhelligkeit eigentlich als ein Beobachtungsergebnis betrachtet werden kann.

3. *Ionisation des Wasserstoffs.* — UNSÖLD'S Theorie. A. UNSÖLD hat darauf hingewiesen<sup>1)</sup>, daß infolge der großen Wasserstoffmenge, die dicht unter der Oberfläche in den ionisierten Zustand übergeht, das Verhältnis der spezifischen Wärmen in diesen Schichten nicht konstant bleibt, sondern abnorm kleine Werte annimmt, so daß zwischen  $\tau \sim 1,3$  und  $\tau \sim 40$  ein Gebiet auftritt, wo der adiabatische Temperaturgradient sogar kleiner wird als der des Strahlungsgleichgewichts. Damit ist der Zustand aber labil geworden, und bei irgendeiner eintretenden geringen Störung werden die Gase von selbst in eine aufwärts strömende Bewegung versetzt. Nach UNSÖLD sollten nun an der oberen Grenze der Labilitätszone *Wirbel* ihren Ursprung finden, und die von diesen Wirbeln emporgesogenen Gasmassen würden dann infolge adiabatischer Abkühlung als dunkle Flecke bemerkbar sein.

UNSÖLD erörtert die Verhältnisse an einem anschaulichen (als Abb. 6 reproduzierten) Druck-Entropie-Temperatur-Diagramm der idealisierten (d. h. ausschließlich aus Wasserstoff zusammengesetzten) Sonnenatmosphäre.

Die Entropie  $S$  des ionisierenden Wasserstoffs [bequemlichkeitshalber dividiert mit der Gaskonstante  $R = kN^2$ ] wurde als Funktion des Gasdrucks  $p$  aufgetragen, während im Diagramm zugleich die Kurven konstanter Temperatur angegeben sind. Die gestrichelte Kurve stellt den „thermodynamischen Weg“ der Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht dar, d. h. die Aueinanderfolge von Zuständen, welche durch die Gleichungen

$$p = \frac{g}{k} \tau = 78 \tau \quad (g = 2,74 \cdot 10^4 \text{ und } k \approx 350) \quad (26)$$

und

$$T^4 = T_g^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right)$$

bestimmt werden.

Die Labilitätszone befindet sich zwischen  $M_1$  und  $M_2$ .

Wünscht man nun das Bild einer aus irgendeinem Punkt der Sonnenatmosphäre adiabatisch aufsteigenden Gasmasse im Diagramm zu ver-

<sup>1)</sup> A. UNSÖLD, ZS. f. Astrophys. **1**, 138, 1930; **2**, 209, 1931.

<sup>2)</sup> Die hier auftretende BOLTZMANN'SCHE Konstante  $k$  wird wohl nicht verwechselt werden mit dem  $k$  aus Gleichung (26), das den Massenabsorptionskoeffizienten bezeichnet.

folgen, so hat man nur eine Gerade  $S = \text{const}$  durch diesen Punkt zu legen. Es läßt sich dann die Temperaturverteilung als Funktion von  $\tau$  an den Schnittpunkten dieser Geraden mit den Temperaturkurven sofort ablesen.

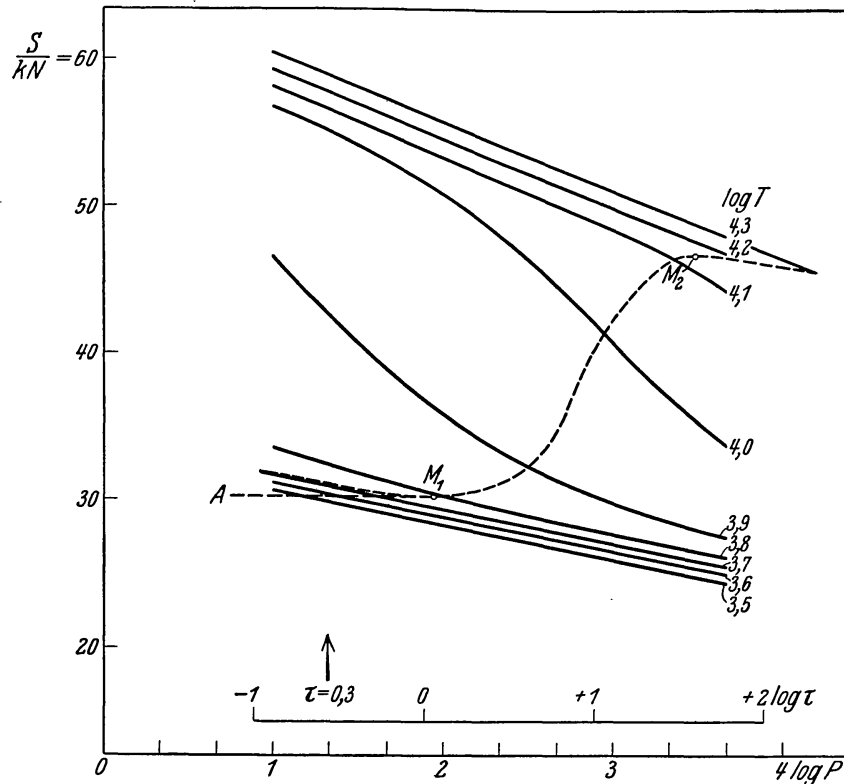


Abb. 6. Druck-Entropie-Temperatur-Diagramm der Sonnenatmosphäre nach Unsöld.

Zur Herstellung dieses Diagramms wurde folgender Ausdruck für die Entropie des ionisierenden Wasserstoffs benutzt:

$$\frac{S}{2,303 k N} = (1 + x) \left( \frac{5}{2} \log T - \log p \right) + 5,51 + 0,603 x + \{ (1 + x) \log(1 + x) - (1 - x) \log(1 - x) - 2 x \log x \}. \quad (27)$$

Hier ist  $S$  die Entropie,  $T$  und  $p$  Temperatur und Gasdruck,  $k$  die Boltzmannsche Konstante,  $N$  die Anzahl der Atome im Grammolekül und  $x$  der Ionisationsgrad, der sich berechnen läßt aus der Saha'schen Formel

$$\log \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{5}{2} \log T - \log p - \frac{6,83 \cdot 10^4}{T} - 0,48. \quad (28)$$

Wir müssen nunmehr die Berechnung von Unsöld wiederholen mit Rücksicht darauf, daß man es tatsächlich nicht mit einem einzigen effektiven



Niveau zu tun hat, sondern daß man Strahlungen aus verschiedenen Tiefen zu summieren hat. Dazu wollen wir auch hier wieder die aus einer derartigen Gassäule heraustretende Gesamtstrahlung für jedes  $\lambda$  gemäß

$$J_{\lambda}(0,0) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

berechnen. Es wird jetzt  $T$  als Funktion von  $\tau$  durch „trial and error“ mit Hilfe der beiden Gleichungen (27) und (28) bestimmt, nachdem  $p$  schon mittels (26) in  $\tau$  ausgedrückt war.

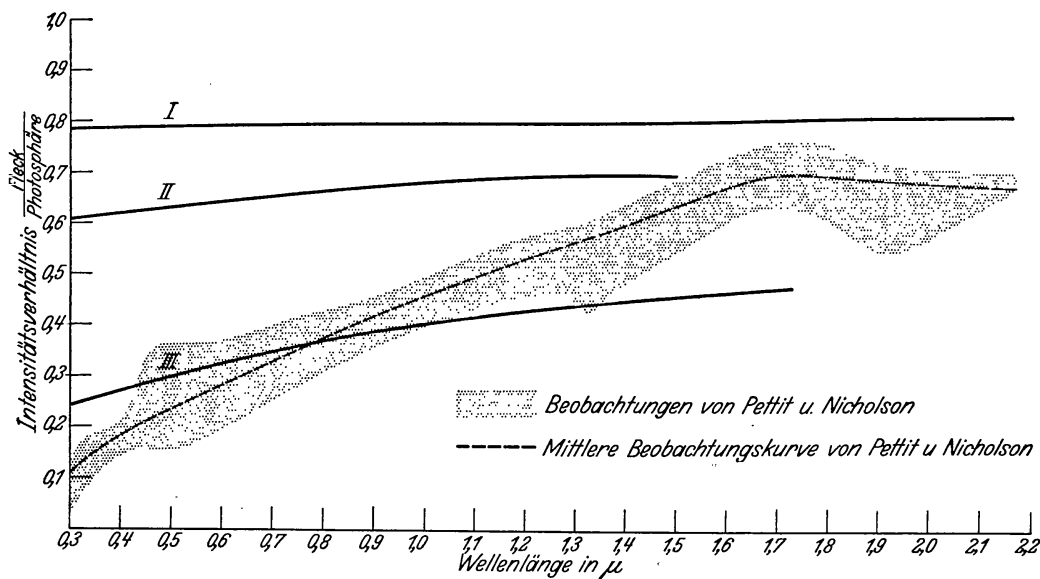


Abb. 7. Die Wellenlängenabhängigkeit nach der adiabatischen Theorie unter Berücksichtigung der Ionisation des Wasserstoffs.

Wir haben diese Berechnung zuerst für ein Gas, das von der oberen Grenze der Labilitätszone (also aus  $M_1$  in Abb. 6) aufsteigt, ausgeführt. Das Resultat ist, daß bei dieser Annahme die Flecke so untief und durchsichtig werden, daß man unterhalb der Grenze  $\tau = 1,3$  noch Schichten beobachten wird, die sich im gewöhnlichen photosphärischen Strahlungsgleichgewicht befinden (wie es durch den gestrichelten thermodynamischen Weg dargestellt wird).

a) Das Intensitätsverhältnis Fleck/Photosphäre zeigt sich nunmehr nahezu unabhängig von der Wellenlänge. Die Kurve verläuft fast parallel zu der Abszissenachse (Abb. 7, Kurve I), und überdies bei einem viel zu großen Wert der Ordinate ( $\sim 0,8$ ; im Violett ist derselbe somit etwa das Vierfache des experimentell gefundenen!). Woraus wohl hinreichend

folgt, daß UNSÖLDs Verfahren, die „effektive Temperatur“ des Flecks aus der Gastemperatur bei  $\tau = 0,8$  zu bestimmen, nicht zutrifft.

Versucht man im Fleck eine schwächere Strahlung zu bekommen, indem man die Gase *aus größerer Tiefe* aufsteigen läßt, etwa von einem Punkt auf der Atmosphärenkurve zwischen  $M_1$  und  $M_2$ , so scheidet dieser Versuch; man sieht ja sofort aus der Abb. 6, daß die Fleckengase dann überall heißer als die Umgebung ankommen, und der Fleck somit heller als die ihn umgebenden Teile der Sonnenscheibe werden muß.

Schließlich können wir noch den Ansatz machen, die Gase seien aus sehr großer Tiefe heraufgestiegen, etwa aus dem Punkt (außerhalb des Diagramms, rechts), wo die Atmosphärenkurve die Isentrope  $S/kN = 25$  schneidet. Dann gelangen die Gase allerdings mit sehr tiefer Temperatur in die oberen Schichten; vor allem wird der Fleck aber dunkler erscheinen, weil der Beobachter, der durch die obersten Schichten hindurchschaut, diejenigen unter dem Niveau  $M_1$  viel tiefer temperiert sieht als im Fall des Strahlungsgleichgewichts.

Die Kurven II und III (Abb. 7) enthalten das Resultat unserer Berechnungen für ein Gas, das bei der Expansion den Isentropen  $S/kN = 30,1$  bzw. 29,4 folgt. Der Fleck ist nun erheblich dunkler geworden; indessen ist die Änderung des Kontrastes mit der Wellenlänge ebenso gering und unbefriedigend wie zuvor.

Nun besteht aber die Sonnenatmosphäre tatsächlich nicht völlig aus Wasserstoff, wie wir es bisher einfachheitshalber annahmen. Um den Einfluß der nichtionisationsfähigen „toten Materie“ zu übersehen, wollen wir im Anschluß an die Resultate RUSSELLs u. a.<sup>1)</sup> die Sonnengase aus rund 10% toten Atomen und 90% Wasserstoff zusammengesetzt denken. Dann ergibt sich für die Entropie des Gasgemisches statt Gleichung (27) folgende Form

$$\frac{S}{2,303 k N} = (1 + 0,9 x) \left[ \frac{5}{3} \log T - \log p \right] + (1 + 0,9 x) \log(1 + x) + 0,9 (1 - x) \log(1 - x) - 1,8 x \log x + 0,54 x + 5,84, \quad (29)$$

wo  $x$  wieder durch (28) bestimmt wird (letztere Formel bleibt hier unverändert gültig). In (29) wurde für das Atomgewicht der toten Materie 32 gesetzt<sup>2)</sup>, was zu einer chemischen Konstante  $i = 15,40$  Anlaß gibt.

<sup>1)</sup> H. N. RUSSELL, Ap. J. **70**, 11, 1929; A. UNSÖLD, ZS. f. Astrophys. **3**, 81, 1931.

<sup>2)</sup> H. N. RUSSELL, l. c.

Wie schon vorher [nach bloßer Vergleichung von (29) und (27)] zu erwarten stand, gelangten wir mit unserer neuen Gleichung (29) in Verbindung mit (26) und (28) zu einer mit der früheren fast identischen Temperaturverteilung als Funktion von  $\tau$ . Erst bei  $\tau = 6$  fingen die Werte an, um einen übrigens nur geringfügigen Betrag von den früher gefundenen abzuweichen. Auch die Berücksichtigung einer zusammengesetzten — wenn auch immer noch wesentlich aus Wasserstoff bestehenden — Atmosphäre vermag somit nicht, eine bessere Kurve der Wellenlängenabhängigkeit zu erzielen.

b) Auch die Winkelabhängigkeit wurde auf Grund des UNSÖLDSchen Modells untersucht. Abb. 8 gibt die Resultate für die beiden Kurven II und III der Abb. 7 ( $\lambda = 4000$ ). Wie man sieht, ist der Verlauf von II nicht unbefriedigend (der Kontrast zwischen Fleck und Photosphäre ändert sich ja nach dem Rand hin fast nicht). Dies ist aber gerade die Kurve, für die der Fleck nur sehr wenig dunkler als die Umgebung wurde; während III, welche sich auf dunklere Flecke bezog, nunmehr einen ziemlich schnell auf den Rand hin zunehmenden Kontrast aufweist.

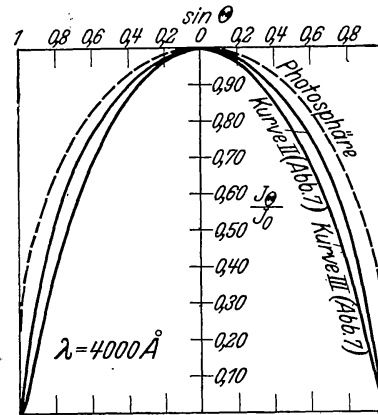


Abb. 8. Intensitätsverteilung auf der Sonnenscheibe unter Berücksichtigung der Ionisation des Wasserstoffs.

Natürlich war es nicht unsere Absicht, die sehr zutreffenden und unverkennbar richtigen Bemerkungen UNSÖLDS über den Einfluß der Wasserstoffionisation, sowie die durch sie bedingte Labilität zu bezweifeln. Wir können uns sehr wohl denken, daß die Granulation ihren Ursprung in Gasmassen hat, die, nachdem sie durch das Labilitätsgebiet hindurchgeströmt sind, heller als die Umgebung an die Oberfläche gelangen. Zur Erklärung der Sonnenflecke genügen UNSÖLDS Betrachtungen jedoch nach unserer Meinung nicht.

4. *Der Einfluß des Strahlungsdrucks.* E. A. MILNE<sup>1)</sup> hat den Einfluß des Strahlungsdrucks auf konvektives Gleichgewicht untersucht. Nach seinen Ausführungen wird der Zustand in der sich adiabatisch ausdehnenden Gassäule bestimmt durch folgende zwei Gleichungen: erstens die Differentialgleichung für das konvektive Gleichgewicht

$$\rho d(c_v T) - \frac{p + p'}{\rho} d\rho = 0, \quad (30)$$

<sup>1)</sup> E. A. MILNE, Quart. Journ. Math. (Oxford) 1, 1, 1930; auch Handb. d. Astrophys. III/2, S. 809.

wo  $p$  = Gasdruck,  $p'$  = Strahlungsdruck,  $\rho$  = Dichte; und zweitens die bekannte mechanische Gleichgewichtsbeziehung

$$d(p + p') = g\rho dh. \quad (31)$$

Die erste Gleichung läßt sich integrieren zu

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(4 - \alpha) \log p + \frac{4}{3}(\alpha - 1) \log(4p - \alpha p + 3p') - \alpha \log p' \\ = \text{dieselbe Formel für } p_a \text{ und } p'_a. \end{aligned} \quad (30')$$

Hier ist  $\alpha = \gamma/(\gamma - 1)$ , während der Index  $a$  sich auf den Zustand der äußersten Schichten bezieht, etwa bei  $\tau = 0,1$ .

Die zweite Gleichung wird, indem man statt der geometrischen Tiefe  $h$  die optische Tiefe  $\tau$  einführt und mit konstantem  $k$  rechnet, einfach

$$p + p' = \frac{g}{k} \tau. \quad (31')$$

Aus diesen beiden Gleichungen (30') und (31') läßt sich nun wieder für verschiedene  $\gamma$ -Werte die Temperaturverteilung in der adiabatischen Säule herleiten; diese erweist sich aber als fast identisch mit der früheren im § C schon ermittelten.

Augenscheinlich liegen die optisch zugänglichen Schichten im Fleck zu wenig tief, um vom Strahlungsdruck einen merklichen Einfluß zu erleiden.

*5. Einstrahlung.* In allen unseren Herleitungen wurde von einem Faktor abgesehen, der ganz sicher in mehr oder weniger hohem Maße tätig ist: die Einstrahlung der heißeren Teile der Sonnenatmosphäre auf die kühleren. Den Einfluß dieses Effekts können wir jedoch besser *nach* § E erörtern.

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, welche man heranziehen könnte, um die Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu verbessern und zugleich der Realität mehr anzupassen. Bisher wurde angenommen, das adiabatische Gleichgewicht solle sich bis an die äußersten Grenzen der Sonnenatmosphäre fortsetzen. Wir wollen uns jetzt fragen, ob nicht die Annahme, daß das konvektive Gleichgewicht in den höchsten Schichten wieder aufs neue in Strahlungsgleichgewicht übergehe, der Wirklichkeit *mehr* entsprechen dürfte. In ihrer extremen Form führt diese Ansicht zu überraschenden Resultaten, wenn man nämlich mit Strahlungsgleichgewicht in allen optisch zugänglichen Schichten des Fleckes rechnet.

*E. Strahlungsgleichgewicht im Sonnenfleck.*

Nehmen wir nunmehr an, daß der Ursprung der Abkühlung sich so tief in der Photosphäre befinde, daß wir ihn selbst nicht mehr beobachten können, sondern nur die Atmosphäre über demselben, die jedoch praktisch wieder in Ruhe gekommen sei, wodurch auch hier wieder Strahlungsgleichgewicht herrschen möge. Auf welche Weise wird sich dann der Einfluß der erfolgten Abkühlung bemerkbar machen? Offenbar dadurch: das *Strahlungsgleichgewicht einer tieferen effektiven Temperatur herrscht an Stellen, die wir als Sonnenfleck bezeichnen.*

In diesem Falle gelten für die Fleckintensitäten ähnliche Formeln wie für die Photosphäre, nämlich (7) und (8); nur ist die dort eingehende Grenztemperatur  $T_g$  zu ersetzen durch eine  $T_g^*$ , die gleichfalls definiert wird durch eine Beziehung

$$T_g^{*4} = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^{*4},$$

wo nunmehr  $T_{\text{eff}}^*$  die (durch den Nettostrom der Energie bestimmte) effektive Temperatur des Flecks bezeichnet. Es ist somit

$$J_{\lambda}^{\text{Fleck}}(0,0) = \frac{c_1}{\lambda^5} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_g^*} [1 + \frac{3}{2} \tau]^{-1/4}} - 1}. \quad (32)$$

Bestimmt man auch hier das Verhältnis  $J_{\lambda}^{\text{Fleck}}(0,0)/J_{\lambda}^{\text{Phot}}(0,0)$  als Funktion von der Wellenlänge, so kann man es erstens wieder den Beobachtungen, z. B. bei  $\lambda$  6500 (wie es diesmal — in Abb. 9 — gemacht wurde), anschließen, wo das Verhältnis gleich 0,3 sein soll. Hieraus ergibt sich dann

$$\underline{T_{\text{eff}}^* = 4300^{\circ}}.$$

Indem man mit dieser Temperatur ferner die Wellenlängenabhängigkeit bestimmt, erreicht man eine überraschende Übereinstimmung mit PERRY und NELSON'S experimenteller Kurve, wie aus der Abb. 9 ersichtlich ist. Es fallen die beiden Kurven von  $\lambda$  4000 bis  $\lambda$  8000 fast ganz zusammen, von welchem Punkt an die theoretische Kurve ein wenig tiefer verläuft, aber doch noch innerhalb des Gebietes der einzelnen Beobachtungspunkte. Erwägt man weiter noch, daß nach den amerikanischen Forschern ihre Kurve jenseits von  $\lambda = 0,8 \mu$  wahrscheinlich etwas zu hoch liegt, dann ergibt sich somit eine fast vollkommene Übereinstimmung zwischen Theorie

und Beobachtung, falls man sich die Gasmassen der Sonnenflecke in reinem Strahlungsgleichgewicht denkt<sup>1)</sup>.

Auch die *Winkelabhängigkeit* ist mit den Beobachtungen in guter Übereinstimmung: der Kontrast zwischen Fleck und umringender Photosphäre ändert sich über die Scheibe praktisch nicht (Abb. 10), genau so,

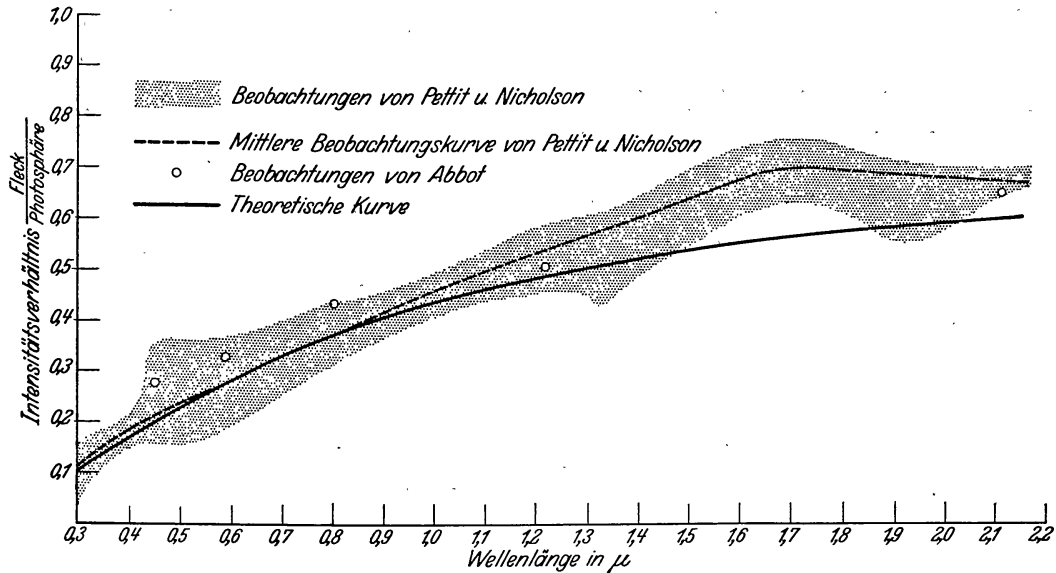


Abb. 9. Die Wellenlängenabhängigkeit unter Annahme von Strahlungsgleichgewicht in den sichtbaren Fleckschichten.

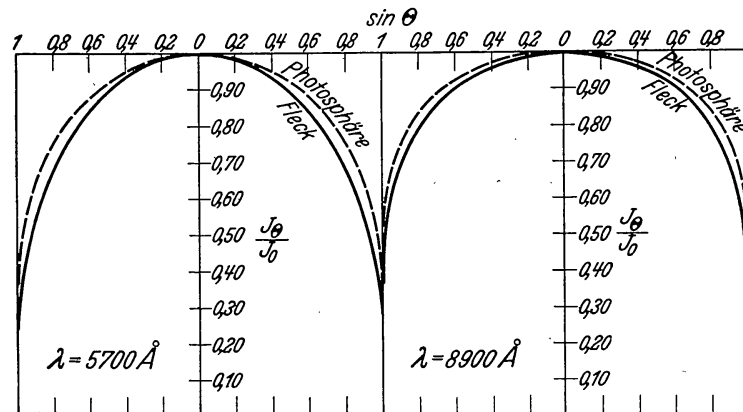


Abb. 10. Intensitätsverteilung auf der Sonnenscheibe. Strahlungsgleichgewicht in den sichtbaren Fleckschichten.

<sup>1)</sup> Es wurde die theoretische Kurve auch ermittelt für die *ursprüngliche*, also nicht um 0,1 in der Richtung der Ordinatenachse verschobene Kurve von PETTIT und NICHOLSON, für die somit  $J_{Fl.} : J_{Phot.} = 0,4$  wäre bei  $\lambda 6500$ . In diesem Fall wurde nur die effektive Temperatur des Flecks etwas höher ( $4580^\circ$ ); im übrigen gestaltete sich die Kurve ganz wie die der Abb. 9.

wie es die zur Verfügung stehenden Daten (Intensitätsmessungen an größeren Flecken) auszuweisen scheinen.

### F. Schluß.

In Abb. 11 ist die Temperaturverteilung für die verschiedenen Hypothesen über den Bau der Sonnenflecke, deren Konsequenzen wir oben verfolgt haben, angegeben worden.

Der Vergleich zwischen den Beobachtungen und den theoretischen Ergebnissen hat uns eigentlich zu folgendem bestimmten Schluß geführt: die Übereinstimmung wird desto besser, je mehr der Temperaturgradient

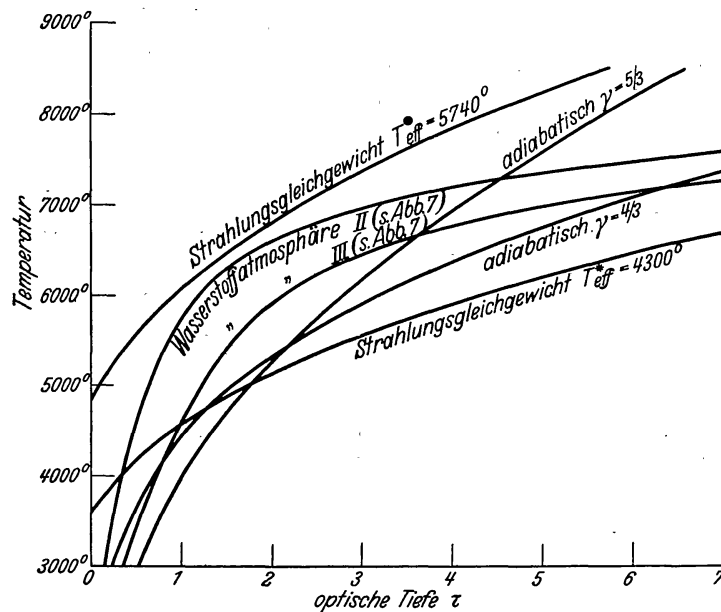


Abb. 11. Temperaturverlauf in den sichtbaren Fleckschichten nach den verschiedenen Hypothesen.

in den Schichten, in die unser Blick noch eindringt, abnimmt. Dies geht sowohl aus der Prüfung der Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre von  $\lambda$  hervor als auch aus der von  $\Theta$ . Einen hinreichend langsamen Temperaturgradienten gibt es nur beim Strahlungsgleichgewicht bzw. bei einer so langsam aufsteigenden Strömung, daß die Ein- und Ausstrahlung der Hauptfaktor wird, der die Temperatur der Schichten bestimmt; letzteres ist aber praktisch „Strahlungsgleichgewicht“.

Die Stelle, an der die Fleckengase abkühlen, muß so tief liegen, daß wir sie nicht mehr unmittelbar sehen können. Nur das Resultat der Abkühlung nehmen wir wahr. Es ist deshalb auch nicht möglich, lediglich aus der Beobachtung der heraustretenden Strahlung zu schließen, ob diese

## 320 M. MINNAERT und A. J. M. WANDERS, Zur Theorie der Sonnenflecke.

Abkühlung durch einen sehr schnellen Aufstieg über eine kurze Strecke mit sehr wenig Einstrahlung erfolgt ist, oder vielmehr durch einen langsamen Aufstieg über einen größeren Weg, jedoch mit sehr merklicher Einstrahlung. Nur weitere theoretische Untersuchungen dürften darüber vielleicht etwas lehren können.

Es wäre interessant, an diese neue Ansicht noch einige weitere Betrachtungen anzuschließen. Beschränken wir uns auf zwei Bemerkungen. Erstens hat schon seinerzeit W. H. JULIUS<sup>1)</sup> sich darüber gewundert, daß in der Umbra von Flecken im Zentrum der Sonnenscheibe keine Violettverschiebung der Spektrallinien beobachtet wird, die auf eine ausströmende Bewegung der Fleckengase hinweisen könnte. Dies Fehlen aufwärtsgerichteter Strömungen in der Umbra der Flecke verträgt sich durchaus mit unserer Hypothese eines ungestörten Strahlungsgleichgewichts in den optisch zugänglichen Schichten.

Schließlich noch eine Bemerkung anläßlich der UNSÖLD'schen Labilitätszone. Allerdings wird auch in den Schichten des *Sonnenflecks* der Wasserstoff infolge der eintretenden Ionisation ein Konvektionsgebiet veranlassen. Nun ist aber sofort ersichtlich, daß wegen der allgemeinen Temperaturerniedrigung in der Gassäule des Flecks die Ionisationssphäre auf tiefere Niveaus zurückgedrängt werden muß, und man berechnet leicht, daß die obere Grenze der Konvektionszone sich erst bei  $\tau \sim 7$  befinden wird. Dies hat aber zur Folge, daß ihre Anwesenheit im Fleck praktisch nicht mehr bemerkbar ist.

Wir danken den Herren Prof. L. S. ORNSTEIN und Prof. A. PANNEKOEK, die so freundlich waren, das Manuskript durchzulesen.

---

<sup>1)</sup> W. H. JULIUS, Ap. J. **40**, 1, 1914.