1950VeGoe...5..385V

HARVARD COLLEGE
OBSERVATORY

Sonderabdruck
aus der „Zeitschrift für Astrophysik", 27. Band, 1. Heft, 1950,
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg.

VERÖFFENTLICHUNGEN
DER
UNIVERSITÄTS-STERNWARTE ZU GÖTTINGEN
Nr. 95

Dämpfung und Mitte-Rand-Variation der Flügel der Mg-Serie 3^1P-n^1D auf der Sonne.

Von
HANS-HEINRICH VOIGT.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 5. Oktober 1949.)

Göttingen 1950

APR 14 1951

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

I. Die Flügelstärke c. A. Messung der Flügelstärken. 1. Aufnahmen. 2. Standardisierung. 3. Definition von *c*. 4. Die Meßergebnisse. B. Berechnung der Flügelstärken. 1. Die Linientiefe. 2. Die benutzte Schichtung. 3. Die Linienabsorption. 4. Berechnung von ζ. 5. Die kontinuierliche Absorption. 6. Die endgültige Gleichung für die Flügelstärke. 7. Die Größe $af\bar{\gamma}$.

II. Die Dämpfung. A. Theoretische Berechnung der Dämpfung durch Stoß mit Wasserstoff und mit Elektronen und Ionen (quadratischer Starkeffekt). B. Ein Vergleich von Beobachtung und Theorie zeigt, daß die Dämpfung der ersten Linien vorwiegend durch Stöße mit H-Atomen bedingt ist, während für die höheren Serienglieder die Dämpfung durch Elektronenstöße mehr und mehr überwiegt. Ferner wird das überraschende Verhalten der *f*-Werte (sekundäres Maximum) bestätigt. Die Ergebnisse lassen schließlich eine große relative Magnesiumhäufigkeit ($a > 30\%$) vermuten.

III. Mitte-Rand-Variation. A. Unter Benutzung der MINNAERTschen Formel und der theoretisch berechneten Dämpfung wird die Mitte-Rand-Variation berechnet. Sie ergibt sich, abgesehen von der ersten Linie, stärker als die beobachtete. B. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung wird besser, wenn in tiefen Schichten ($\tau_0 > 2$) der Energietransport vorwiegend durch Konvektion erfolgt.

Es hat sich in den letzten Jahren, nachdem man über die Schichtung und den Strahlungsaustausch in der Sonnenphotosphäre in großen Zügen Bescheid weiß, gezeigt, daß die Dämpfungsverbreiterung der starken Linien nicht allein durch Strahlungsdämpfung bedingt sein kann. Den wesentlichen Beitrag liefert vielmehr die Stoßdämpfung. In der folgenden Arbeit soll die Art der Dämpfung sowie ihre Tiefenabhängigkeit und ihre Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl für den speziellen Fall der diffusen Mg-Serie $3^1P - n^1D$ untersucht werden. Von den ersten sieben Linien dieser Serie sind die folgenden fünf durch „blends" nicht stark gestört.

Sie sind alle so stark, daß sie in den Bereich reiner Dämpfungsverbreiterung fallen.

---

* Auszug aus der Göttinger Dissertation.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Ein Niveauschema der Serie findet man bei GROTRIAN [1]. An Untersuchungen über das Verhalten dieser Serie in der Sonnenatmosphäre nennen wir eine Arbeit von MINNAERT und GENARD [2], sowie eine Untersuchung von UNSÖLD [3].

n	λ	Rowland-Int.
3	8806,8	4
4	5528,4	8
5	4703,0	10
7	4167,3	8
9	3986,8	6

Unsere Kenntnisse der Temperaturschichtung der Sonne sind immer noch unsicher für die höchsten Schichten (optische Tiefe $\tau < 0{,}1$) und für die tiefen Schichten ($\tau > 2$), in denen die Konvektion eine Rolle spielt. Im zweiten Teil der Arbeit soll deshalb versucht werden, aus der Mitte-Rand-Variation Rückschlüsse auf eine etwa notwendig werdende Änderung der angenommenen Schichtung zu ziehen.

I. Die Flügelstärke *c*.

A. Messung der Flügelstärken.

1. *Aufnahmen*: Die dieser Untersuchung zugrunde liegenden Aufnahmen wurden 1942 von Prof. v. KLÜBER am großen Gitter- bzw. Prismenspektrographen in Potsdam gewonnen und von Frl. ROHLFS [4] ausgemessen und reduziert. Der Potsdamer große Gitterspektrograph (12 m Brennweite, 18 cm Öffnung) mit einer linearen Dispersion von 1,4 bzw. 0,7 Å/mm in der ersten bzw. zweiten Ordnung sowie die Beobachtungs- und Reduktionsmethode bei photometrischen Untersuchungen an Fraunhoferlinien sind ausführlich von P. TEN BRUGGENCATE, J. HOUTGAST und H. v. KLÜBER [5] beschrieben worden. Eine Beschreibung des Prismenspektrographen (9 m Brennweite, Öffnungsverhältnis 1 : 70) nebst Dispersionskurven findet sich bei K. WURM [6].

Tabelle 1 gibt eine Übersicht der benutzten Platten und Filme. Die Filme 4 und 5 sowie die Platten 6 und 7 mit der Linie λ 5528 dienten

Tabelle 1. *Filme und Platten.*

Film bzw. Platte	Linien	Spektrograph	Durchmesser Sonnenbild
1. Film vom 9. 5. 1942	3987–5528	Prisma	13 cm
2. Film vom 10. 5. 1942	3987–5528	Prisma	27 cm
3. Film vom 18. 5. 1942	3987–5528	Prisma	13 cm
4. Film vom 28. 8. 1942	5528	Gitter II. Ordnung	13 cm
5. Film vom 2. 9. 1942	5528	Gitter II. Ordnung	13 cm
6. Platte vom 20. 5. 1942	5528	Gitter I. Ordnung	13 cm
7. Platte vom 4. 6. 1942	5528	Gitter I. Ordnung	13 cm
8. Platte vom 9. 5. 1942	8807	Gitter I. Ordnung	13 cm
9. Platte vom 10. 5. 1942	8807	Gitter I. Ordnung	13 cm
10. Platte vom 4. 6. 1942	8807	Gitter I. Ordnung	13 cm

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

zum Anschluß der mit dem Gitterspektrographen gewonnenen Aufnahmen an diejenigen des Prismenspektrographen. Benutzt wurde als Filmmaterial: Agfa Isopan F, als Plattenmaterial für 8807 Agfa 850. Die Belichtungszeiten sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2. *Belichtungszeiten.*

Linie	Mitte-Aufnahmen		Randaufnahmen		Spektrograph
3987	60s und	180s	150s und	300s	Prisma
4057	20	60	40	120	
4167	15	60	40	120	
4352	8	30	20	60	
4703	2	8	4	16	
5528	½	1	2	4	
5528	1s	3s	2s	6s	Gitter
8807	4m	12m	8m	24m	

Bei den Aufnahmen lag der Spalt in Richtung des Sonnenradius. Der Sonnenrand wurde nach dem von J. HOUTGAST [9] benutzten Verfahren festgelegt. Mit einem Zeiß-Registrierphotometer wurden für alle Linien die Profile für $\sin \vartheta = 0{,}00$; $= 0{,}98$ und $= 0{,}99$ registriert, wobei ϑ den Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und Normale zur Sonnenoberfläche darstellt. Auf den Filmen 1 und 3 wurde außerdem noch bei $\sin \vartheta = 0{,}95$ registriert; auf den übrigen Filmen und Platten war dazu das Randspektrum zu schmal.

Die durch Luftunruhe und Streulicht in der Erdatmosphäre bedingte Ungenauigkeit bei der Festlegung eines Punktes auf der Sonnenscheibe beträgt etwa 3″, bei einem Sonnenbild von 13 bzw. 27 cm Durchmesser also etwa 0,02 bzw. 0,04 mm. Die Höhe des Registrierspaltes wurde kleiner als diese Beträge gewählt.

2. *Standardisierung.* Zur Standardisierung der Aufnahmen wurden auf denselben Platten und Filmen mit einem kleinen Gitterspektrographen, der ebenfalls in [5] beschrieben worden ist, mit einem siebenstufigen Filter, breitem Spalt und einer Wolframlampe mit verschiedenen Lampenintensitäten Aufnahmen gemacht. Die Schwärzungen wurden für die Wellenlängen der Mg-Linien mit einem Zeißregistrierphotometer gemessen.

Da von jeder Linie verschieden lang belichtete Aufnahmen vorlagen, ließ es sich erreichen, daß einmal die Linienmitte, das andere Mal die Flügel im gut definierten Bereich der Schwärzungskurve liegen. Durch Zusammensetzen der Teilbereiche einer Linie konnte ein zuverlässiges Intensitätsprofil gewonnen werden. Die Zusammensetzung geschieht am einfachsten dadurch, daß man $\log {}^{i_\nu}/_{i_0}$ gegen λ aufträgt und die Teil-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

bereiche durch Verschieben in Richtung der $\log {}^{i_\nu}/_{i_0}$-Achse aneinandersetzt. Dabei bedeutet i_ν die Intensität an der betrachteten Stelle, i_0 diejenige des Kontinuums.

3. *Definition von c.* Die so gemessene Intensität an einer Stelle des Linienprofils bezieht sich zunächst auf das aus der Registrierkurve gewonnene Kontinuum, das durch die große Ausdehnung der Linienflügel aber noch verfälscht und durch blends gestört sein kann. Die Reduktion auf das wahre Kontinuum geschah nach dem Verfahren von MINNAERT [7]. In den äußeren Teilen der Linie, in denen der Dopplereffekt vernachlässigt werden kann, wird die Linientiefe r unabhängig von der Schichtung proportional zu ${}^1/_{\Delta\lambda^2}$, also

$$r = \frac{i_0 - i_\nu}{i_0} = \frac{c}{\Delta\lambda^2}, \tag{1}$$

woraus

$$i_\nu = i_0 - \frac{c\, i_0}{\Delta\lambda^2} \approx i_0 - \frac{c\, i_\nu}{\Delta\lambda^2} \tag{2}$$

folgt. Dabei ist im zweiten Glied in hinreichender Näherung i_0 durch i_ν ersetzt worden.

Man trägt nun für geeignete Meßpunkte, deren Zahl zwischen 6 und 60 schwankte, i_ν als Funktion von ${}^{i_\nu}/_{\Delta\lambda^2}$ auf. Das muß nach (2) eine Gerade ergeben, deren Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Kontinuumsintensität i_0 liefert, und deren Steigung durch die MINNAERTsche Konstante c gegeben ist. Diese Größe c, die charakteristisch für die Stärke der Linienflügel ist, wollen wir im folgenden kurz mit „Flügelstärke" bezeichnen. c und i_0 wurden durch Ausgleichsrechnung bestimmt. Die folgende Untersuchung stützt sich auf die in der angedeuteten Weise von Frl. ROHLFS [4] ermittelten Flügelstärken.

4. *Die Meßergebnisse.* Die Meßergebnisse sind nach [4] in Tabelle 3 zusammengestellt. Die angegebenen Werte sind für $\sin\vartheta = 0{,}00$; 0,98 und 0,99 Mittelwerte aus drei Platten bzw. Filmen, für $\sin\vartheta = 0{,}95$ jedoch nur aus zwei Platten.

Tabelle 3. *Die Meßergebnisse*

	Äquivalentbreiten in Å				Relative Werte			
λ \ $\sin\vartheta$	0,00	0,95	0,98	0,99	0,00	0,95	0,98	0,99
8807	0,658		0,404	0,378	1		0,61	0,57
5528	0,359	0,315	0,301	0,280	1	0,88	0,84	0,78
4703	0,398		0,310	0,256	1		0,78	0,64
4167	0,395	0,342	0,300	0,256	1	0,87	0,76	0,65
3987	0,297	0,244	0,230	0,181	1	0,82	0,77	0,61

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Flügelstärken c in Å².

λ \ $\sin\vartheta$	0,00	0,95	0,98	0,99
8807	0,0706 ± 63		0,0278 ± 7	0,0249 ± 14
5528	167 ± 12	0,0147 ± 36	128 ± 10	109 ± 9
4703	204 ± 36		129 ± 13	101 ± 14
4167	176 ± 13	147 ± 3	117 ± 9	090 ± 11
3987	104 ± 18	073 ± 13	068 ± 7	050 ± 5

Verhältnis der Flügelstärken c/c_0.

λ \ $\sin\vartheta$	0,00	0,95	0,98	0,99
8807	1		0,39 ± 4	0,35 ± 4
5528	1	0,88 ± 22	0,77 ± 8	0,65 ± 7
4703	1		0,63 ± 13	0,50 ± 11
4167	1	0,84 ± 6	0,66 ± 7	0,51 ± 7
3987	1	0,70 ± 17	0,65 ± 13	0,48 ± 10

Die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der mit dem Gitter- und der mit dem Prismenspektrographen gewonnenen Aufnahmen der Linie 5528 sind von der Größenordnung der mittleren Fehler selber, so daß von einer systematischen Abweichung nicht gesprochen werden kann.

Bei den Linien 8807, 5528 und 4703 sind die Flügel nur wenig gestört und c daher gut bestimmt. Die Linie 4167 ist stärker gestört und c nur durch wenig Punkte festgelegt. Bei 3987 konnte c nur auf der kurzwelligen Seite gewonnen werden, da auf der langwelligen Seite eine Mn-Co-Linie im Abstand von 0,34 Å unsere Linie stört. Die Linien 4351 und 4057 sind durch Nachbarlinien so gestört, daß ihr Profil nicht bestimmt werden konnte.

Für die Flügelstärken, die uns im folgenden interessieren, sind noch die mittleren Fehler der Mittelwerte in Einheiten der letzten Dezimale gegeben, die nach der üblichen Methode $\varepsilon = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p]\,(n-1)}}$ bestimmt wurden. Die mittleren Fehler der relativen Werte ergeben sich daraus nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Sie geben nur ein Maß für die innere Genauigkeit der Messungen. Photometrisch ist die Linie λ 5528 am sichersten zu erfassen, weil sie nur wenig gestört ist und in einem günstigen Spektralbereich liegt. Im Infrarot bei λ 8807 wird beim Potsdamer Turmteleskop die Fokussierung des Sonnenbildes auf den Spalt des Spektrographen unsicher. Bei den kurzwelligen Linien im Blauen nimmt der Linienreichtum des Sonnenspektrums so sehr zu, daß das Erfassen des Kontinuums immer unsicherer wird.

B. Berechnung der Flügelstärken.

1. *Die Linientiefe.* Wir versuchen nun, die Flügelstärke theoretisch zu berechnen. Aus Gleichung (1) folgt:

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

$$c = r \cdot \Delta\lambda^2 . \tag{3}$$

Unser Hauptproblem ist also die Berechnung der Linientiefe r in den Flügeln. Dazu benutzen wir die von MINNAERT [8] entwickelte, sehr allgemeine Theorie, die es gestattet, eine ganz willkürlich von der optischen Tiefe abhängende Planckfunktion zu verwenden. Nach längeren, in der zitierten Arbeit durchgeführten Rechnungen erhält man schließlich

$$r = \frac{i_0 - i_\nu}{i_0} = \frac{\sec^2\vartheta \int_0^\infty E\,\tau_\nu\, e^{-\tau\sec\vartheta}\,d\tau - \sec\vartheta \int_0^\infty E\,\frac{\varkappa_\nu}{\varkappa}\, e^{-\tau\sec\vartheta}\,d\tau}{\sec\vartheta \int_0^\infty E\, e^{-\tau\sec\vartheta}\,d\tau} \tag{4}$$

mit

$$\tau_\nu = \int_0^\tau \frac{\varkappa_\nu}{\varkappa}\,d\tau . \tag{5}$$

Dabei ist

E die Planckfunktion,
$\varkappa_\nu$ der Linienabsorptionskoeffizient,
$\varkappa$ der kontinuierliche Absorptionskoeffizient,
τ_ν die optische Tiefe für Linienabsorption,
τ die optische Tiefe für kontinuierliche Absorption,
ϑ der Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und Sonnennormale.

Gleichung (4) ist im wesentlichen identisch mit dem ersten Glied der Gleichung (8) der MINNAERTschen Arbeit (η ist hier gleich 1 gesetzt). Bei MINNAERT enthält die Gleichung noch ein zweites, ähnlich aufgebautes, durch Streuung bedingtes Glied. Diese spielt aber, wie in neuerer Zeit HOUTGAST [9], ZANSTRA [10], SPITZER [11] und in einer Zusammenfassung UNSÖLD [12] gezeigt haben, in den Fraunhoferlinien keine wesentliche Rolle. Vielmehr kann man in den Flügeln starker Fraunhoferlinien erwarten, daß sich die Reemission dem Typus „wahre Absorption" annähert.

Für die graphische Integration ist es zweckmäßig, $e^{-\tau\sec\vartheta} = x$ als neue Variable einzuführen. Dann lautet Gleichung (4)

$$r = \frac{\sec\vartheta \int_0^1 E\,\tau_\nu\,dx - \int_0^1 E\,\frac{\varkappa_\nu}{\varkappa}\,dx}{\int_0^1 E\,dx}, \tag{6}$$

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

wobei zu beachten ist, daß auch $\tau_\nu = \int_0^\tau \frac{\varkappa_\nu}{\varkappa} d\tau$ als Funktion von x zu berechnen ist. Wir wenden uns nun der Berechnung von E und $\frac{\varkappa_\nu}{\varkappa}$ im einzelnen zu.

2. *Die benutzte Schichtung.* Benutzt wurde die auf BARBIER [13] zurückgehende Temperatur- und Druckschichtung in der neuen Bearbeitung von DE JAGER [14]. Letztere unterscheidet sich von der ursprünglichen durch Berücksichtigung des Heliums und in tieferen Schichten der Konvektion. Ferner berechnet DE JAGER das Verhältnis von Elektronen- zu Gasdruck p_e/p nach der exakten Methode STRÖMGRENS [15].

Die Tafeln in der zitierten Arbeit von DE JAGER liefern Druck und Temperatur als Funktion der optischen Tiefe τ_0 für λ 5010. Der Übergang auf andere Wellenlängen geschieht mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$\varkappa_0 \, d\tau = \varkappa \, d\tau_0 \quad \text{oder} \quad \tau = \int_0^{\tau_0} \frac{\varkappa}{\varkappa_0} d\tau_0, \tag{7}$$

wobei $\varkappa$ und $\varkappa_0$ die kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten für eine beliebige Wellenlänge und für λ 5010 sind. Ihre Berechnung werden wir nachher näher betrachten. Mit Hilfe von Gleichung (7) und der Tafel von DE JAGER, die auszugsweise in Tabelle 4 wiedergegeben ist, erhält man so Temperatur und Druck als Funktion der optischen Tiefen τ für die Wellenlängen der Mg-Linien. Damit ist auch die nur von der Temperatur abhängige Planckfunktion als Funktion von τ gegeben. Dabei kommt es nur auf das Glied $\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}$ an, da E linear im Zähler und Nenner der Gl. (6) auftaucht.

3. *Die Linienabsorption.* Für den Absorptionskoeffizienten in den Flügeln ($\Delta\omega \gg \gamma/2$) erhält man in bekannter Weise [3, § 40f.]

$$\varkappa_\nu = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{m c^3} \cdot \frac{\lambda^4}{(\Delta\lambda)^2} \cdot N f \gamma. \tag{8}$$

Dabei bedeutet N die Zahl der absorbierenden Atome pro g Materie (wir verstehen hier unter $\varkappa_\nu$ stets den Massen-Absorptionskoeffizienten also $\mathrm{cm^2\,g^{-1}}$), f die Oszillatorenstärke, γ die Dämpfung und $\Delta\lambda$ der Abstand von der Linienmitte.

Die Zahl der absorbierenden Atome pro g ist gegeben durch

$$N = N_{Mg} \cdot \zeta\,(p_e, T), \tag{9}$$

wobei N_{Mg} die Gesamtzahl aller Mg-Atome und -Ionen pro g Materie und $\zeta\,(T, p_e)$ den Bruchteil der neutralen Atome im 3^1P-Zustand angibt.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Wasserstoff und Helium bestimmen wegen ihrer großen Häufigkeit die Masse, die in einem Volumelement der Sonnenatmosphäre enthalten ist. Wir setzen nach DE JAGER [14] ein Häufigkeitsverhältnis He: $H = 1 : 5$ voraus. Bezeichnen wir mit den Symbolen der Elemente die Anzahl Atome pro cm³, und mit m_H und m_{He} die Masse eines Atoms in Gramm, so wird nach einfacher Überlegung

$$N_{Mg} = \frac{Mg}{m_H H + m_{He} He} = \frac{Mg}{m_H H} \frac{1}{1 + \frac{m_{He}}{m_H} \cdot \frac{He}{H}} = \frac{Mg}{1{,}80\, m_H H}, \quad (10)$$

wobei 1,80 gewissermaßen das mittlere Atomgewicht charakterisiert. Mit den üblichen Abkürzungen für die Wasserstoff- und relative Magnesiumhäufigkeit

$$A = \frac{\text{„Wasserstoff“}}{\text{„Metall“}} \quad \text{und} \quad a = \frac{\text{Mg}}{\text{„Metall“}} \quad (11)$$

lautet Gleichung (10)

$$N_{Mg} = \frac{1}{1{,}80\, m_H} \frac{a}{A}. \quad (12)$$

Aus (8), (9) und (12) erhält man nach Division durch $\varkappa$

$$\frac{\varkappa_\nu}{\varkappa} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{m c^3} \cdot \frac{1}{1{,}80\, m_H} \cdot \frac{a}{A} f \gamma \frac{\zeta}{\varkappa} \cdot \frac{\lambda^4}{(\Delta\lambda)^2}. \quad (13)$$

[Die Worte „Wasserstoff“ und „Metall“ in Gleichung (11) sind dabei symbolisch zu verstehen. „Wasserstoff“ charakterisiert die Elemente mit hohem Ionisationspotential > 10 eV (H, He, Ne, O, N, C . . .), „Metall“ diejenigen mit niedrigem Ionisationspotential < 10 eV (Fe, Mg, Si, Al, Ca, Na . . .).]

4. *Berechnung von* ζ. Der Bruchteil ζ kann nach der Saha- und Boltzmannformel berechnet werden. Da die Metalle vorwiegend einfach ionisiert sind, also $N_1 \gg N_0$, können wir zunächst in hinreichender Näherung $\frac{N_0}{N_0 + N_1} = \frac{N_0}{N_1}$ setzen. Diese Näherung bewirkt im ungünstigsten Fall, für die optische Tiefe $\tau = 0{,}05$, einen um den Faktor 1,07 zu großen Wert. Der Fehler wird aber mit wachsender optischer Tiefe immer kleiner, und da nachher über τ integriert wird, ist diese Vernachlässigung belanglos.

Durch Kombination der Saha- und Boltzmannformel ergibt sich dann mit $\frac{5040}{T} = \Theta$

$$\log \zeta = \log \frac{N_0}{N_1} + \log \frac{N_{0,P}}{N_0} = (\chi_0 - \chi_{0,P})\,\Theta - \frac{5}{2} \log T + \log \frac{g_{0,P}}{2\, u_1} + 0{,}48 + \log p_e. \quad (14)$$

(393)

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Dabei bedeutet T die Temperatur und p_e der Elektronendruck.

Ferner ist: χ_0 = Ionisationspotential des Mg I = 7,61 eV,
$\chi_{0,P}$ = Anregungspotential des 3^1P-Zustands = 4,33 eV,
$g_{0,P}$ = statistisches Gewicht des 3^1P-Zustands = 3,
u_1 = Zustandssumme der ersten Ionisationsstufe.

u_1 ist praktisch gleich $g_{1,0} = 2$, da die übrigen Terme keinen bemerkbaren Beitrag liefern. Mit diesen Zahlenwerten erhält man schließlich

$$\log \zeta = 3{,}28\,\Theta - \frac{5}{2}\log T + 0{,}36 + \log p_e. \qquad (15)$$

Die Werte von $\log \zeta$ als Funktion der optischen Tiefe τ_0 sind in Tabelle 4 angegeben.

Tabelle 4. *Die Schichtung.*

τ_0	Θ	$\log p$	$\log p_e$	$\log \zeta$	$\zeta/\varkappa$ (in Einheiten 10^{-3}) (8807)	(5528)	(4703)	(4167)	(3987)	τ
0,00	1,024	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	9,15	11,23	13,20	15,14	15,50	0,00
0,02	1,013	4,28	0,42	—5,13	7,28	8,90	10,20	11,48	12,03	0,02
0,04	1,003	4,44	0,56	5,04	6,92	8,18	9,38	10,71	11,07	0,04
0,06	0,993	4,54	0,65	4,99	6,56	7,82	8,88	10,00	10,35	0,06
0,08	0,981	4,60	0,72	4,97	6,26	7,36	8,48	9,44	9,80	0,08
0,10	0,973	4,65	0,78	4,94	6,02	7,02	7,95	8,91	9,34	0,10
0,20	0,933	4,81	1,00	4,91	5,15	5,55	6,46	7,08	7,26	0,20
0,40	0,873	4,97	1,28	4,87	3,83	3,95	4,47	4,73	4,68	0,40
0,60	0,830	5,056	1,54	4,83	2,95	3,10	3,39	3,63	3,61	0,60
0,80	0,798	5,109	1,75	4,77	2,40	2,53	2,75	2,95	2,93	0,80
1,00	0,772	5,141	1,94	4,71	2,14	2,18	2,30	2,51	2,46	1,00
1,50	0,724	5,187	2,29	4,59	1,55	1,62	1,70	1,92	1,79	1,50
2,0	0,690	5,214	2,56	4,48	1,23	1,25	1,34	1,51	1,42	2,0
2,5	0,664	5,231	2,76	4,40	1,04	1,05	1,11	1,29	1,21	2,5
3,0	0,634	5,244	2,99	4,32	0,90	0,91	0,96	1,17	1,08	3,0
4,0	0,614	5,263	3,14	4,27	0,71	0,73	0,81	1,05	0,93	4,0
5,0	0,602	5,281	3,25	4,23	0,60	0,64	0,74	0,97	0,87	5,0
6,0	0,595	5,296	3,30	4,21	0,53	0,59	0,72	0,93	0,85	6,0
7,0	0,588	5,311	3,35	—4,20	0,49	0,56	0,71	0,91	0,83	7,0

Obwohl mit wachsender Tiefe und steigender Temperatur der Bruchteil der neutralen Atome abnimmt, nimmt ζ mit der Tiefe zu, weil von den verbleibenden neutralen Atomen ein immer größerer Bruchteil zum 3^1P-Zustand angeregt wird. In den tiefsten Schichten erreicht ζ fast den 10fachen Wert der höchsten Schichten.

5. *Die kontinuierliche Absorption.* Die kontinuierliche Absorption wird in der Sonne bis zur optischen Tiefe $\tau = 1$ praktisch nur durch H^--Ionen

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

bewirkt. In tieferen Schichten liefern dann die neutralen H-Atome ebenfalls einen bemerkbaren Beitrag. Für die gesamte kontinuierliche Absorption setzen wir also (pro g Materie gerechnet)

$$\varkappa = \varkappa(\mathrm{H}^-) + \varkappa(\mathrm{H}). \tag{16}$$

Der Absorptionskoeffizient für H^--Absorption als Funktion von Θ wurde den Arbeiten von CHANDRASEKHAR und BREEN [16] entnommen. Die dort angegebenen Werte (Tabelle 7 der zitierten Arbeit) wurden zunächst graphisch auf unsere Wellenlängen interpoliert und sodann durch Multiplikation mit $\frac{1}{1{,}80\, m_H} \cdot p_e$ pro g Materie umgerechnet.

Zur Berechnung der Beiträge des neutralen Wasserstoffs wurden die Werte von UNSÖLD [3, Tab. 28] benutzt, die in analoger Weise auf unsere Wellenlängen interpoliert und durch Multiplikation mit $\frac{1}{1{,}80}$ pro g Materie umgerechnet wurden. Die Summe liefert dann die gesamte kontinuierliche Absorption $\varkappa$. Die Werte von $\zeta/\varkappa$ als Funktion der optischen Tiefen für unsere Wellenlängen sind ebenfalls in Tabelle 4 angegeben; sie nehmen mit wachsender optischer Tiefe ab, da $\varkappa$ schneller wächst als ζ.

Auch in den obersten Schichten, in denen p_e gegen Null geht, läßt sich $\varkappa$ berechnen; denn hier spielt lediglich die H^--Absorption eine Rolle, und sowohl $\varkappa(\mathrm{H}^-)$ wie ζ sind proportional zu p_e.

In gleicher Weise, wie eben erläutert, wurde auch $\varkappa_0$ (kontinuierliche Absorption für λ 5010) berechnet. Damit haben wir das Verhältnis $\varkappa_0/\varkappa$ und können nach Gleichung (7) den Zusammenhang zwischen τ_0 und τ für unsere Wellenlängen angeben. Es zeigt sich, daß das Verhältnis $\varkappa_0/\varkappa$ bis zur optischen Tiefe 1,5 praktisch konstant ist, und zwar ergibt sich

$$\varkappa_0/\varkappa_{8807} = 0{,}738 \qquad \varkappa_0/\varkappa_{5528} = 0{,}915 \qquad \varkappa_0/\varkappa_{4703} = 1{,}064$$

$$\varkappa_0/\varkappa_{4167} = 1{,}219 \qquad \varkappa_0/\varkappa_{3987} = 1{,}282$$

Bis $\tau = 1{,}5$ gilt also einfach die Beziehung

$$\tau = \frac{\varkappa}{\varkappa_0}\,\tau_0, \tag{17}$$

während für größere Tiefen das Integral (7) graphisch bestimmt werden muß.

6. *Die endgültige Gleichung für die Flügelstärke.* Setzen wir nun den Wert von $\varkappa_\nu/\varkappa$ aus Gleichung (13) in die Gleichung (6) für die Linientiefe ein, so erhalten wir mit Gleichung (3) schließlich, wenn wir alle von τ unabhängigen Größen vor die Integrale ziehen

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

$$c = r \cdot \Delta\lambda^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{m c^3} \cdot \frac{1}{1{,}80\, m_H} \cdot \frac{1}{A} \lambda^4 \cdot \alpha f \bar{\gamma} \cdot \frac{\sec\vartheta \int_0^1 E\, dx \int_0^\tau \zeta/\varkappa\, d\tau - \int_0^1 E\, \zeta/\varkappa\, dx}{\int_0^1 E\, dx} \tag{18}$$

Dabei haben wir auch die von der Tiefe abhängende Dämpfung γ vor die Integrale gezogen. Wie der Mittelwert $\bar{\gamma}$ zu bilden ist, werden wir später sehen. Die Abhängigkeit der Flügelstärke vom Ort auf der Sonnenscheibe steckt einmal in dem Faktor $\sec\vartheta$, sodann in der Integrationsvariablen $dx = -e^{-\tau\sec\vartheta} \sec\vartheta\, d\tau$.

Der letzte Faktor in Gleichung (18) mit den verschiedenen Integralen, sowohl in der obigen Form ohne γ, als auch derselbe Ausdruck, jedoch mit der Dämpfung γ noch unter den Integralen, wird im folgenden noch häufig vorkommen. Wir führen daher folgende Abkürzungen ein:

$$(I) \equiv \frac{\sec\vartheta \int_0^1 E\, dx \int_0^\tau \zeta/\varkappa\, d\tau - \int_0^1 E\, \zeta/\varkappa\, dx}{\int_0^1 E\, dx}, \tag{19}$$

$$(I_\gamma) \equiv \frac{\sec\vartheta \int_0^1 E\, dx \int_0^\tau \gamma\, \zeta/\varkappa\, d\tau - \int_0^1 E\, \gamma\, \zeta/\varkappa\, dx}{\int_0^1 E\, dx}; \tag{20}$$

Mit DE JAGER setzen wir $A = 10^{3{,}8}$. Nach Einsetzen der Atomkonstanten $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGS; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g; $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g und $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1} wird dann schließlich

$$c = 39{,}5 \cdot 10^{-6}\, \lambda^4\, a f \bar{\gamma}\, (I) \text{ cm}^2. \tag{21}$$

7. *Die Größe $af\bar{\gamma}$.* Wir lösen (21) nach $af\bar{\gamma}$ auf und erhalten

$$af\bar{\gamma} = \frac{c}{39{,}5 \cdot 10^{-6}\, \lambda^4\, (I)}. \tag{22}$$

Für die Flügelstärken c setzen wir nun die beobachteten Werte aus Tabelle 3 ein. (Dabei ist zu beachten, daß sie dort in Å^2, in Gleichung (21) dagegen in cm^2 gegeben sind.) Die in (I) vorkommenden Integrale wurden graphisch ausgewertet. Die Zahlenwerte, zunächst für die Sonnenmitte ($\sec\vartheta = 1$), sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Wie man aus (396)

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

der letzten Spalte sieht, sind die *relativen* $f\bar{\gamma}$-Werte ziemlich konstant, unabhängig von der Hauptquantenzahl. Die Änderungen von f und $\bar{\gamma}$ mit n heben sich also in erster Näherung gegenseitig auf.

Tabelle 5.

λ	(I)	c_{beob} [cm²]	$af\bar{\gamma}$ [sec^{-1}]	$(f\bar{\gamma})_{rel}$
8807	$12{,}4 \cdot 10^{-6}$	$7{,}06 \quad 10^{-18}$	$2{,}40 \cdot 10^8$	1,00
5528	$19{,}8 \cdot 10^{-6}$	$1{,}67 \quad 10^{-18}$	$2{,}29 \cdot 10^8$	0,96
4703	$26{,}9 \cdot 10^{-6}$	$2{,}04 \quad 10^{-18}$	$3{,}93 \cdot 10^8$	1,64
4167	$33{,}1 \cdot 10^{-6}$	$1{,}76 \quad 10^{-18}$	$4{,}46 \cdot 10^8$	1,86
3987	$34{,}2 \cdot 10^{-6}$	$1{,}04 \quad 10^{-18}$	$3{,}04 \cdot 10^8$	1,27

II. Die Dämpfung.

A. Theoretische Abschätzung der Dämpfung.

Wir versuchen nun, die Dämpfung theoretisch abzuschätzen. Nach unseren bisherigen Kenntnissen kommen neben der Strahlungsdämpfung Stoßdämpfung durch Wasserstoff wegen seiner großen Häufigkeit in Frage und Stoßdämpfung durch Elektronen und Ionen wegen der Starkeffektempfindlichkeit unserer Mg-Serie.

1. *Strahlungsdämpfung.* Die Strahlungsdämpfung ist quantenmechanisch gleich der Summe der Abklingkonstanten des oberen und des unteren Terms. Da diese mit wachsender Hauptquantenzahl sehr schnell abnimmt, ist die Strahlungsdämpfung praktisch für alle Glieder konstant und gleich der Abklingkonstanten des unteren Terms. Von diesem führt nur die eine Linie λ 2852 zum 3^1S-Term (Grundterm). Setzt man die Oszillatorenstärke dieser Resonanzlinie gleich 1, so erhält man [3, § 71]

$$\gamma_{Str} = \frac{0{,}22}{\lambda^2} = 2{,}7 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}. \tag{23}$$

2. *Stoßdämpfung allgemein.* Wie Unsöld [17] gezeigt hat, können wir im vorliegenden Fall die Stoßdämpfung nach der Weisskopf-Lenzschen Stoßtheorie berechnen. Für den Grenzabstand $\Delta\lambda_g$, welcher die „statistischen Flügel" vom inneren „Stoßdämpfungsteil" trennt, erhält man im ungünstigsten Fall nach der von Unsöld angegebenen Formel für Wasserstoffatome $\Delta\lambda_g = 23$ Å, für Elektronen 7,0 Å. Selbst in den Linienflügeln befinden wir uns also noch in dem Teil, für den die Stoßtheorie zutrifft.

Die allgemeine Formel für die Verbreiterung nach dieser Theorie lautet [17 (12)]

$$\gamma = (2\pi)^{\frac{s+1}{s-1}} \cdot C^{\frac{2}{s-1}} \cdot v^{\frac{s-3}{s-1}} \cdot c_s^{\frac{2}{s-1}} \cdot \eta_0^{\frac{-2}{s-1}} \cdot N. \tag{24}$$

(397)

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

s gibt die Potenz an, mit welcher die Frequenzverstimmung vom Abstand r vom gestörten Atom abhängt. Für uns wird:
Stoß durch H-Atome: VAN DER WAALS-Kräfte $\sim r^{-6}$, $s = 6$
Stoß durch Elektronen: quadratischer Starkeffekt $\sim r^{-4}$, $s = 4$

C ist die Wechselwirkungskonstante, die wir nachher noch näher betrachten werden;

c_s ist eine Konstante, und zwar

$$c_4 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad c_6 = \frac{3\pi}{8}$$

η_0 ist die zum WEISSKOPFschen Stoßradius gehörende Frequenzverstimmung, die „grade noch als Stoß" rechnet. Nach LINDHOLM [18] wird

$$\begin{aligned} &\text{für } s = 4 \quad \eta_0 = \frac{2}{\pi} \qquad \eta_0^{-\frac{2}{3}} = 1{,}34 \\ &\text{für } s = 6 \quad \eta_0 = 0{,}61 \qquad \eta_0^{-\frac{2}{5}} = 1{,}22 \end{aligned} \tag{25}$$

N ist die Anzahl der störenden Teilchen pro cm³. Für $s = 4$ erhalten wir die Anzahl der Elektronen und Ionen aus der Beziehung

$$N_e = \frac{p_e}{kT}. \tag{26}$$

(p_e = Elektronendruck, T = Temperatur, k = Boltzmannkonstante). Für $s = 6$ beachten wir, daß wegen der großen Häufigkeit von Wasserstoff und Helium der Gasdruck im wesentlichen gleich der Summe der Partialdrucke dieser Elemente ist. Mit dem oben angenommenen Häufigkeitsverhältnis 1 : 5 wird also

$$p = p_H + p_{He} = (N_H + N_{He})\, kT = 1{,}2\, N_H\, kT$$

und damit

$$N_H = \frac{p}{1{,}2\, kT}. \tag{27}$$

v ist die Relativgeschwindigkeit zwischen störendem und gestörtem Teilchen. Nach der kinetischen Gastheorie wird

$$v = \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot R \cdot T \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}. \tag{28}$$

(R = Gaskonstante, μ_1 und μ_2 Molekulargewichte des störenden bzw. gestörten Teilchens).

3. *Stoß durch H-Atome.* Damit erhalten wir aus (24) für die Dämpfung durch H-Atome ($s = 6$) den Ausdruck

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

$$\gamma_H = 22{,}6 \cdot C_H^{2/5} (R\,T)^{3/10} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{3/10} \cdot N_H$$
$$= 18{,}8 \cdot C_H^{2/5} \cdot R^{3/10} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{3/10} \frac{1}{k}\, p\, T^{-7/10}. \tag{29}$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (71.22) in [3] bis auf den Faktor 1,22, der von der LINDHOLMschen Verbesserung des WEISSKOPFschen Stoßradius herrührt. Nach Einsetzen der Atomkonstanten und der Molekulargewichte $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 24{,}3$ erhält man

$$\log \gamma_H = 18{,}82 + \frac{2}{5} \log C_H + \log p - \frac{7}{10} \log T. \tag{30}$$

Schwierigkeiten macht nun die Berechnung der Wechselwirkungskonstanten C_H. Nach [3, § 71] erhält man mit einigen, teilweise groben Näherungen

$$C_H = \frac{e^2}{h} \cdot \alpha \cdot \bar{R}_k^2. \tag{31}$$

(e = Elektronenladung, α = Polarisierbarkeit des H-Atoms, nach BETHE $= 0{,}663\ 10^{-24}$ cm³). $\bar{R}_k^2$, der Mittelwert des Quadrats des Bahnradius für den Quantenzustand k, ist für die erste Linie von BIERMANN und Mitarbeitern quantenmechanisch berechnet worden. Ihr Wert beträgt in Einheiten des Wasserstoffradius a (mündliche Mitteilung)

$$\frac{\bar{R}_k^2}{a^2} = 100{,}9. \tag{32}$$

Für die anderen Linien wurde folgende Abschätzung angestellt: Nach [3 (71, 27)] ist für einen Term mit der Hauptquantenzahl n und Impulsquantenzahl l

$$\frac{\bar{R}_{n,l}^2}{a^2} = \frac{n^2}{2}\{5\,n^2 + 1 - 3\,l\,(l+1)\}. \tag{33}$$

Das Leuchtelektron geht bei uns von einem p- in einen d-Zustand über. Da der energetisch höher liegende Term am empfindlichsten gegen Phasenstörungsstöße sein wird, setzen wir, einem d-Zustand entsprechend, $l = 2$. Dann ergibt sich aus (32) und (33) die wirksame Hauptquantenzahl $n^* = 2{,}88$. Sie liegt also 4% unterhalb der wahren Hauptquantenzahl $n = 3$. Nun wurden auch für die übrigen Linien um 4% kleinere Werte angenommen und damit schließlich C_H nach der Formel

$$C_H = 64{,}4\ 10^{-35} \frac{n^{*2}}{2} \{5n^{*2} - 17\} \tag{34}$$

(399)

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

berechnet, die sich nach Einsetzen der Konstanten aus (31) und (33) sofort ergibt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 Spalte 2 enthalten.

4. *Stoß durch Elektronen und Ionen.* Nach Einsetzen der entsprechenden Größen ($s = 4$) erhält man aus (24) analog

$$\begin{aligned}\gamma_E &= 2^{2/3} \cdot \pi^{16/3}\, 1{,}34 \cdot C_E^{2/3} (RT)^{1/6} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{1/6} N_E \\ &= 45{,}4\; C_E^{2/3} R^{1/6} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{1/6} \frac{1}{k}\, p_e\, T^{-5/6}\end{aligned} \tag{35}$$

(bis auf den Faktor 1,34 identisch mit [3 (71, 74)]). Mit den Molekulargewichten $\mu_1 = 1/1838$ und $\mu_2 = 24{,}3$ und den Atomkonstanten erhält man

$$\log \gamma_E = 19{,}38 + \frac{2}{3} \log C_E + \log p_e - \frac{5}{6} \log T. \tag{36}$$

Die Konstante C_E ist für die Linien λ 5528, 4703 und 4351 von ECKARTH [19] aus Laboratoriumsmessungen des quadratischen Starkeffekts bestimmt worden. Für große Hauptquantenzahlen n geht nach BETHE C_E etwa proportional mit n^7. Deshalb wurde C_E für λ 4167 und 3987 ($n = 7$ und $n = 9$) aus der Formel

$$C_E = C_{n=6} \cdot \left(\frac{n}{6}\right)^7 \tag{37}$$

berechnet. Für λ 8807 wurde C_E durch graphische Extrapolation geschätzt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 Spalte 3 angegeben.

Tabelle 6. *Die Wechselwirkungskonstanten.*

λ	log C_H	log C_E
8807	— 31,19	— 13,88
5528	— 30,57	— 13,11
4703	— 30,15	— 12,58
4167	— 29,51	— 11,70
3987	— 29,07	— 10,93

Für Stöße mit Ionen ändert sich in Gleichung (35) lediglich das Molekulargewicht, statt $\mu_1 = 1/1838$ heißt es nun $\mu_1 = 24$. Das bedingt, wie man leicht zeigt, um den Faktor 5,3 kleinere Werte. Es wird also

$$\gamma_i = \frac{\gamma_E}{5{,}3} \quad \text{und} \quad \gamma_{E+i} = 1{,}19 \cdot \gamma_E. \tag{38}$$

Zu der hier beschriebenen Berechnung der Stoßdämpfung ist noch folgendes zu bemerken. Bei der Ableitung der Gleichung (24) ist stets vorausgesetzt, daß die DE BROGLIE-Wellenlänge klein ist gegenüber dem WEISSKOPFschen Stoßradius. Dies ist für Elektronen nur schlecht erfüllt. Wie eine einfache Rechnung zeigt, sind für λ 8807 beide Größen sogar gleich, nämlich etwa 14 Å. Auch dadurch kommt eine schlecht abzuschätzende Ungenauigkeit in die Rechnung, die sich aber nur schwierig umgehen läßt.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

5. *Die wirksame optische Tiefe.* Gasdruck und Elektronendruck und damit auch die Dämpfung durch H-Atome und durch Elektronen hängen sehr verschieden stark von der optischen Tiefe ab. Daher ist die Wahl der mittleren optischen Tiefe, für die wir den Mittelwert $\bar{\gamma}$ zu bilden haben, offenbar von großem Einfluß auf die Frage, in welchem Verhältnis beide wirksam sind. Wir begnügen uns daher nicht mit den üblichen mittleren optischen Tiefen, sondern gehen möglichst exakt vor und wählen den Mittelwert $\bar{\gamma}$ so, daß mit unseren Abkürzungen (19) und (20)

$$\bar{\gamma} = \frac{(I_\gamma)}{(I)} \tag{39}$$

wird. Die Integralausdrücke (I) wurden bereits früher berechnet. Zur Berechnung von (I_γ) ist es zweckmäßig, die Dämpfung für die optische Tiefe 0,01 zunächst als Einheit einzuführen. Die Abhängigkeit von der Tiefe, d. h. von Druck und Temperatur, folgt dann sofort aus den Gleichungen (30) und (36)

$$\log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{0,01}}\right)_H = \log\left(\frac{p}{p_{0,01}}\right) - \frac{7}{10}\log\left(\frac{T}{T_{0,01}}\right) \tag{40}$$

und

$$\log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{0,01}}\right)_E = \log\left(\frac{p_e}{p_{e,0,01}}\right) - \frac{5}{6}\log\left(\frac{T}{T_{0,01}}\right). \tag{41}$$

Der Verlauf von $\log\left(\frac{\gamma}{\gamma_{0,01}}\right)$ ist in Abb. 1 graphisch wiedergegeben.

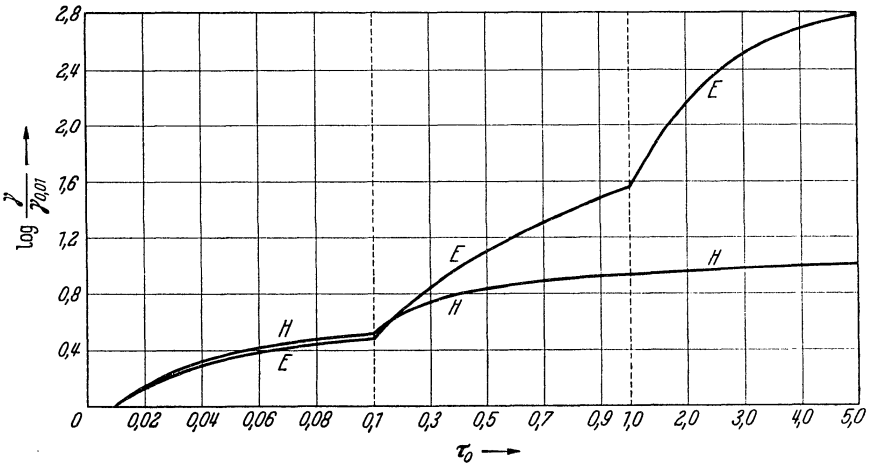

Abb. 1. Tiefenabhängigkeit der Dämpfung. H: Dämpfung durch Wasserstoffstöße E: Dämpfung durch Stöße mit Elektronen und Ionen.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Nach (30) und (36) berechnet man nun die Dämpfungskonstante $\gamma_{0,01}$ für die fünf Linien, die unter Verwendung von Tabelle 6 in Tabelle 7 zusammengestellt sind.

Tabelle 7. *Die Dämpfungskonstanten für* $\tau_0 = 0{,}01$.

λ	$(\gamma_{0,01})_H$	$(\gamma_{0,01})_E$	$(\gamma_{0,01})_{E+i}$
8807	4,0 10^8	0,21 10^8	0,25 10^8
5528	7,1 10^8	0,66 10^8	0,78 10^8
4703	10,5 10^8	1,62 10^8	1,93 10^8
4167	19,1 10^8	5,9 10^8	7,0 10^8
3987	28,2 10^8	19,1 10^8	22,7 10^8

Damit hat man nun γ_H und$(\gamma_E + \gamma_i)$ und damit auch die Gesamtdämpfung $\gamma_{Th} = \gamma_{Str} + \gamma_H + \gamma_E + \gamma_i$ als Funktion von τ. Die theoretische Gesamtdämpfung ist als Funktion von τ in Abb. 2 aufgetragen.

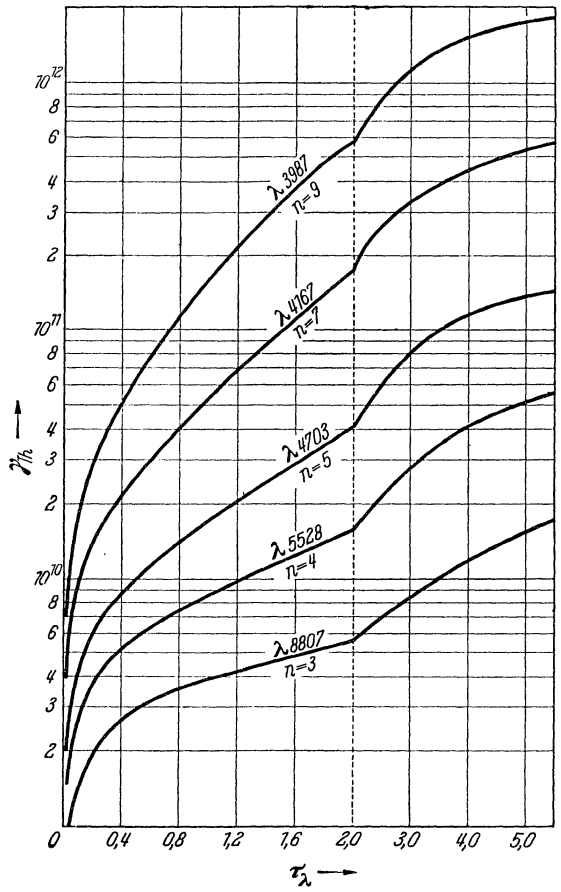

Abb. 2. Die theoretische Gesamtdämpfung für die Linien der Mg-Serie $3^1P - n^1D$.

Nunmehr wurden die Integrale (I_γ) ebenfalls graphisch bestimmt. Aus Gleichung (39) erhält man dann den Mittelwert der theoretischen (402)

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Gesamtdämpfung $\bar{\gamma}_{Th}$. Die Zahlenwerte von (I), (I_γ) und $\bar{\gamma}_{Th}$ sind in Tabelle 8 Spalte 3 bis 5 gegeben. Spalte 6 enthält dann die zugehörigen wirksamen optischen Tiefen, die mit Hilfe der $\bar{\gamma}_{Th}$ direkt der Abb. 2 entnommen werden.

Tabelle 8. *Die theoretische Dämpfung.*

n	λ	(I_γ)	(I)	$\bar{\gamma}_{Th}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\tau}_0$	$\bar{\gamma}_H$	$\bar{\gamma}_{E+i}$
3	8807	$3{,}0\ 10^4$	$12{,}4\ 10^{-6}$	$2{,}4\ 10^9$	0,33	0,24	$2{,}0\ 10^9$	$0{,}1\ 10^9$
4	5528	9,9 „	19,8 „	5,0 „	0,36	0,33	4,1 „	0,6 „
5	4703	25,8 „	26,9 „	9,6 „	0,46	0,49	7,1 „	2,2 „
7	4167	92 „	33,1 „	27,8 „	0,55	0,67	14,3 „	13,2 „
9	3987	250 „	34,2 „	73 „	0,57	0,73	23 „	50 „

Man ermittelt nun rückwärts das zu $\bar{\tau}$ gehörende $\bar{\tau}_0$ und kann mit Hilfe von Abb. 1 und Tabelle 7 sofort nachsehen, welcher Anteil von $\bar{\gamma}$ von Wasserstoff- und welcher von Elektronenstößen herrührt. Das Ergebnis zeigen die letzten beiden Spalten von Tabelle 8. Man sieht, daß für die ersten Linien die Wasserstoffstöße weit überwiegen, während für die höheren Serienglieder die Elektronenstöße mehr und mehr in den Vordergrund treten.

B. Vergleich von Theorie und Beobachtung.

Die Beobachtungen hatten uns die Größe $af\bar{\gamma}$ geliefert (Tabelle 5 Spalte 4). Wir wiederholen sie in Tabelle 9 Spalte 3.

Die f-Werte der ersten drei Linien (Tabelle 9 Spalte 4) entstammen relativen Messungen von KERSTEN und ORNSTEIN, die von BIERMANN[1] mit Hilfe quantenmechanischer Rechnungen einiger starker Magnesiumlinien (das grüne Triplett $3^3P - 3^3D$ u. a.) in Absolutwerte umgerechnet wurden. Ihre Unsicherheit kann gut 25% betragen. Es tritt hier der sehr seltene Fall eines sekundären Maximums der f-Werte für $n = 5$ ein.

Für die relative Magnesiumhäufigkeit a wählen wir, im Anschluß an neuere Arbeiten von UNSÖLD [20] u. a. die Werte 25%, 30%, 35% und 40%.

Mit diesen f- und a-Werten folgen dann sofort unter Verwendung der $af\bar{\gamma}$-Größen die mittleren Gesamtdämpfungen $\bar{\gamma}_{Beob}$ (Tabelle 9 Spalte 5 bis 8). Spalte 9 enthält zum Vergleich die theoretische Gesamtdämpfung $\bar{\gamma}_{Th}$.

[1] Herrn Prof. BIERMANN bin ich für seine Beratung bezüglich der f-Werte und die Überlassung noch unveröffentlichter quantenmechanischer Rechnungen zu großem Dank verpflichtet. Vgl. auch E. TREFFTZ, Z. Astrophysik **26**, 240 (1949), speziell Tabelle 3.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Tabelle 9. *Die Dämpfung.*

n	λ	$af\bar{\gamma}$	f	$\bar{\gamma}_{Beob} \cdot 10^{-9}$				$\bar{\gamma}_{Th}$
				$a=25\%$	30%	35%	40%	
3	8807	2,40 10^8	0,378	**2,5**	2,1	1,8	1,6	2,4 10^9
4	5528	2,29 „	0,095	9,6	8,0	6,9	**6,0**	5,0 „
5	4703	3,93 „	0,125	12,6	10,5	**9,0**	7,9	9,6 „
7	4167	4,46 „						27,8 „
9	3987	3,04 „						73 „

Für λ 8807 erhalten wir die beste Übereinstimmung bei $a = 25\%$, für λ 4703 bei 35% und für λ 5528 bei 40%. Da λ 5528 aber bezüglich der Beobachtung die sicherste Linie ist, werden wir eher auf eine große Mg-Häufigkeit schließen. Die bestehenden Unterschiede dürften einmal durch die Unsicherheit der theoretischen Dämpfung, besonders bei der Bestimmung der Wechselwirkungskonstanten, zum andern durch die Unsicherheit der f-Werte bedingt sein. Zieht man all dies in Betracht, so ist die Übereinstimmung in der Größenordnung doch so gut, daß man als Ergebnis wohl dreierlei sagen kann:

1. Die Dämpfung der diffusen Mg-Serie ist im wesentlichen durch Stöße mit H-Atomen und durch solche mit Elektronen und Ionen bedingt. (Quadratischer Starkeffekt). Und zwar überwiegen in den ersten Seriengliedern die Wasserstoffstöße. Mit zunehmender Hauptquantenzahl treten dagegen die Elektronenstöße mehr und mehr in den Vordergrund.
2. Der Verlauf der Gesamtdämpfung mit der Hauptquantenzahl bestätigt das zunächst überraschende sekundäre Maximum der f-Werte für $n = 5$.
3. Die Beobachtungen sprechen für eine große Magnesiumhäufigkeit, $a > 30\%$.

Da für die beiden letzten Linien keine f-Werte vorliegen, wurde hier die Rechnung umgedreht und mit Hilfe der theoretischen Dämpfung aus den beobachteten $af\bar{\gamma}$-Werten die f-Werte für $n = 7$ und $n = 9$ berechnet. Mit $a = 35\%$ ergeben sich die Werte 0,05 und 0,01. Diese Ergebnisse sind durchaus vernünftig, denn es ist mit Sicherheit anzunehmen, daß die f-Werte nach dem sekundären Maximum schnell abnehmen, schließlich wie n^3. Und das ist hier tatsächlich der Fall.

III. Die Mitte-Rand-Variation und die Schichtung.

A. Die theoretische Mitte-Rand-Variation.

Wir wenden uns nun der Mitte-Rand-Variation (MRV) der Linienflügel zu. Diese charakterisieren wir am besten durch den Gang von (404)

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

c/c_0 mit ϑ, wo c_0 die Flügelstärke in der Mitte der Sonnenscheibe darstellt. Hierbei verschwindet die Unsicherheit der Mg-Häufigkeit und der Oszillatorenstärken f, und man erhält durch Vergleich mit der Beobachtung die Möglichkeit, Aussagen über die Schichtung zu machen. Die Unsicherheit der theoretischen Dämpfung, besonders bei der Bestimmung der Wechselwirkungskonstanten, wird ebenfalls herabgemindert, bleibt aber doch nicht ohne Einfluß. Da die Wasserstoff- und Elektronenstoßdämpfung sehr verschieden von der optischen Tiefe abhängen, so bewirkt eine Änderung der Zusammensetzung der Dämpfung eine Verlagerung des „Schwerpunktes" der optischen Tiefe; und das hat auf die MRV natürlich einen Einfluß.

Wir gehen zurück auf Gleichung (21) für die Flügelstärken, lassen jedoch die Dämpfung nun unter dem Integral stehen, also

$$c = 39{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda^4 \, a f \, (I_\gamma), \tag{42}$$

wobei nach (20)

$$(I_\gamma) = \frac{\sec\vartheta \int_0^1 E\,dx \int_0^\tau \gamma\zeta/\varkappa\, d\tau - \int_0^1 E\,\gamma\zeta/\varkappa\, dx}{\int_0^1 E\,dx} \tag{43}$$

mit $dx = -e^{-\tau\sec\vartheta} \sec\vartheta\, d\tau$.

Für die MRV ergibt sich dann, wenn wir mit dem Index 0 im folgenden stets die Sonnenmitte bezeichnen,

$$\frac{c}{c_0} = \frac{(I_\gamma)}{(I_\gamma)_0}. \tag{44}$$

Die Integralausdrücke, die in der früher beschriebenen Weise graphisch berechnet wurden, sind in Tabelle 10 Spalte 3 unter $(I_\gamma)_{\text{d. J.}}$ angegeben. Der Index „d. J." soll dabei andeuten, daß mit der unveränderten Schichtung von DE JAGER gerechnet wurde. Spalte 5 enthält die zugehörige MRV $(c/c_0)_{\text{d. J.}}$ In der letzten Spalte ist die beobachtete MRV aus Tabelle 3 noch einmal angegeben. Die MRV ist außerdem in Abb. 3 graphisch aufgetragen, und zwar ausgezogen die beobachtete und gestrichelt die mit der DE JAGER-Schichtung berechnete MRV. Die senkrechten Striche charakterisieren die in Tabelle 3 angegebenen mittleren Fehler.

Bis auf λ 8807 liegen die berechneten Werte zum Teil recht erheblich unterhalb der beobachteten. Die Diskrepanz ist einmal durch die im vorigen Kapitel diskutierte Unsicherheit der theoretischen Dämpfung

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

bedingt, zum anderen aber wohl auch durch Abweichung der zugrunde gelegten Schichtung von der wirklichen. Dies soll nun noch näher untersucht werden. Die Ausnahmestellung der Linie 8807 braucht nicht weiter zu beunruhigen, da sie sowohl hinsichtlich der Beobachtung und photometrischen Auswertung, als auch der theoretischen Berechnung die unsicherste Linie darstellt.

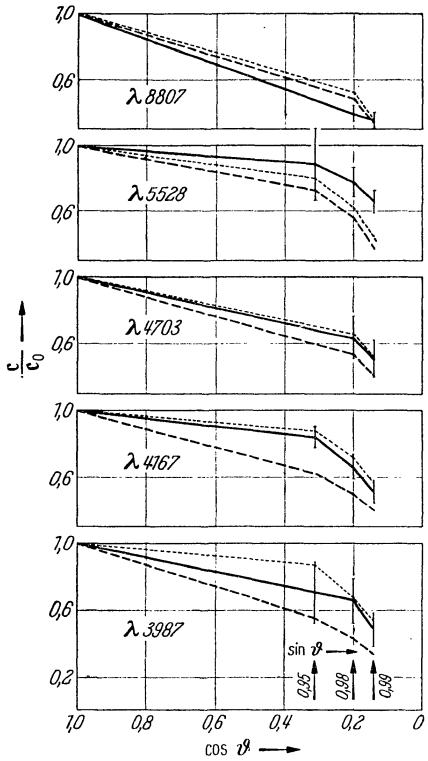

Abb. 3. Mitte-Rand-Variation.
———— Beobachtet. Die senkrechten Striche charakterisieren die mittleren Fehler.
– – – – Berechnet mit der Schichtung von DE JAGER.
. . . . . Berechnet mit adiabatischer Schichtung ab $\tau_0 = 2$.

B. Einfluß einer Schichtungsänderung auf die MRV.

In mittleren optischen Tiefen ist die Schichtung heute recht gut bekannt. Unsicherheit besteht dagegen immer noch in den äußersten Schichten ($\tau < 0{,}1$) und in den tieferen Schichten ($\tau > 2$), in denen Konvektion eine Rolle spielt.

1. *Einfluß der äußersten Schichten.* Es gibt zur Zeit nur wenig Anhaltspunkte, in welcher Weise die wirkliche Schichtung von der DE JAGERschen Schichtung für $\tau < 0{,}1$ abweichen mag. Eine Überschlagsrechnung hat gezeigt, daß eine Temperaturerhöhung in diesen Schichten

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Tabelle 10. *Die Mitte-Rand-Variation der verschiedenen Schichtungen.*

λ	sin ϑ	a) (I_ν) 10^{-5}		b) c/c_0 in Prozenten		
		d. J.	ad	d. J.	ad.	beob.
8807	0,00	0,304	0,283	100	100	100
	0,98	0,146		48	52	39
	0,99	0,100		33	35	35
5528	0,00	0,99	0,89	100	100	100
	0,95	0,71		72	80	88
	0,98	0,54		55	61	77
	0,99	0,38		38	43	65
4703	0,00	2,58	2,07	100	100	100
	0,98	1,36		53	66	63
	0,99	1,04		40	50	50
4167	0,00	9,2	6,5	100	100	100
	0,95	5,7		62	88	84
	0,98	4,6		50	71	66
	0,99	3,7		40	57	51
3987	0,00	25,0	16,1	100	100	100
	0,95	14,0		56	87	70
	0,98	10,8		43	67	65
	0,99	8,3		33	52	48

die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung in der MRV verkleinert. Jedoch ist der Betrag der Änderung überraschend klein. Wir haben deshalb eine solche Schichtungsänderung nicht weiter quantitativ verfolgt, um so mehr, als sich bei den tiefen Schichten viel sicherere Aussagen machen lassen.

2. *Einfluß der tieferen Schichten.* Zunächst liefern die tieferen Schichten $\tau_0 > 2$ im wesentlichen nur für die Kontinuumsstrahlung der Sonnenmitte noch einen bemerkbaren Beitrag. Um eine Annäherung an die Beobachtung zu erreichen, muß c/c_0 größer, also c_0 kleiner werden. Aus der Proportionalität

$$c_0 \sim \frac{i_0 - i_\nu}{i_0} = 1 - \frac{i_\nu}{i_0}$$

sieht man sofort, daß dies der Fall ist, wenn i_0 kleiner, d. h. die Temperatur in den tiefen Schichten geringer wird. Der Temperaturgradient wird aber in diesen Schichten um so kleiner, je mehr Energie durch Konvektion transportiert wird. Es wurde deshalb gleich der Grenzfall gerechnet: In tieferen Schichten ab $\tau_0 = 2$ (nach DE JAGER) soll der

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

Energietransport nur durch Konvektion erfolgen, d. h. wir nehmen hier einen adiabatischen Aufbau an.

Ausgehend von den Zustandsgrößen bei $\tau_0 = 2$ wurde schrittweise weitergehend der adiabatische Temperatur- und Druckverlauf berechnet, und zwar nach den von BIERMANN [21] angegebenen Formeln:

$$\left(\frac{d\log T}{d\log p}\right)_{ad} = \frac{2 + x\,(1-x)\left(\frac{\chi}{kT} + {}^5/_2\right)}{5 + x\,(1-x)\left(\frac{\chi}{kT} + {}^5/_2\right)^2} \tag{45}$$

und

$$\frac{dT}{d\tau_0} = 10^{-3.26}\left(\frac{\mu}{1.67}\right)\frac{1}{\varkappa_0}\,\frac{d\log T}{d\log p} \tag{46}$$

(x = Ionisationsgrad des Wasserstoffs, berechnet mit Hilfe der Sahaformel; χ = Ionisationspotential des Wasserstoffs = 13,53 eV; μ = mittleres Atomgewicht = 1,80). Der zugehörige Elektronendruck wurde jeweils den Tafeln von B. STRÖMGREN [15] entnommen. In Tabelle 11 sind einige Werte der adiabatischen Schichtung zusammengestellt.

Tabelle 11. *Die adiabatische Schichtung.*

τ_0	Θ	$\log p$	$\log p_e$
2,0	0,690	5,214	2,56
2,5	0,682	5,229	2,62
3,0	0,674	5,243	2,68
3,5	0,667	5,256	2,73
4,0	0,662	5,267	2,78
5,0	0,653	5,290	2,86
6,0	0,645	5,305	2,92
7,0	0,639	5,318	2,98
8,0	0,634	5,330	3,02

Mit dieser neuen Schichtung wurden nun in der früher angegebenen Weise die Integralausdrücke $(I_\gamma)_{ad}$ für die Sonnenmitte und damit die neue MRV $(c/c_0)_{ad}$ berechnet. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 10 Spalte 4 bzw. 6. Der neue Verlauf ist in Abb. 3 punktiert eingezeichnet. Im Blauen liegt die MRV nun oberhalb der beobachteten. Im Grünen, bei λ 5528 liegt sie zwar noch unterhalb, nähert sich aber der Beobachtung doch so stark, daß wir insgesamt in den tieferen Schichten wohl auf vorwiegenden Energietransport durch Konvektion, zumindest auf erhöhten Einfluß der Konvektion schließen können in Übereinstimmung mit den theoretischen Arbeiten von BIERMANN [21]. Es ergibt sich hier grundsätzlich die Möglichkeit, von der Beobachtung her die

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

theoretisch nur schwer zugängliche Frage des Energietransportes in den tieferen Schichten weiter zu verfolgen.

Unser Ergebnis steht in Übereinstimmung mit einer Untersuchung [22] über die MRV der Balmerlinien Hα—Hδ, nämlich Erhöhung der Temperatur in den höchsten und Erniedrigung in den tieferen Schichten.

3. *Einfluß auf die Dämpfung.* Es bleibt nun noch festzustellen, wie sich die hier durchgeführte Schichtungsänderung auf die Berechnung der Dämpfung auswirkt.

Zu diesem Zweck wurden für die ersten drei Linien, mit denen wir den Vergleich zwischen beobachteter und theoretischer Dämpfung durchgeführt haben, genau wie in II nun auch die Integralausdrücke $(I)_{ad}$ und dann mit Gleichung (22) die Werte $(af\bar{\gamma})_{ad}$ nach der neuen Schichtung berechnet. Dem früheren Verfahren entsprechend ergeben sich nun auch neue Werte für die theoretische mittlere Dämpfungskonstante $(\bar{\gamma}_{Th})_{ad}$. In Tabelle 12 sind die alten und neuen Werte nebeneinander aufgeführt.

Tabelle 12. *Einfluß der Schichtungsänderung auf die Dämpfung.*

λ	$af\bar{\gamma}$	$(af\bar{\gamma})_{ad}$	$\bar{\gamma}_{Th}$	$(\bar{\gamma}_{Th})_{ad}$
8807	2,40 10^8	2,52 10^8	2,4 10^9	2,4 10^9
5528	2,29 10^8	2,55 10^8	5,0 10^9	4,8 10^9
4703	3,93 10^8	4,57 10^8	9,6 10^9	9,0 10^9

Die Unterschiede übersteigen nicht 16%, sind also kleiner als die Unsicherheit, die durch Dämpfung, Oszillatorenstärke und Mg-Häufigkeit bedingt ist. Unsere früheren Ergebnisse sind also mit der adiabatischen Schichtung ebenso vereinbar und alles dort Gesagte behält seine Gültigkeit.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. TEN BRUGGENCATE für seine weitgehende Unterstützung und Beratung sowie für manchen wertvollen Hinweis meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Literatur

[1] GROTRIAN, W.: Hdb. Astrophysik III/2 S. 533, Springer, Berlin 1930. – [2] MINNAERT, M., u. J. GENARD: Z. Astrophysik **10**, 377 (1935). – [3] UNSÖLD, A.: Physik der Sternatmosphären. Springer, Berlin 1938 – [4] ROHLFS, E.: Messungen der Mitte-Rand-Variation auf der Sonnenscheibe von Linien der Mg-Serie $3^1P - n^1D$. Staatsexamensarbeit, Göttingen 1944. – [5] TEN BRUGGENCATE, P., J. HOUTGAST u. H. v. KLÜBER: Publ. d. Aph. Obs. Potsdam Nr. 96 Bd. 29 Heft 3 (1939). – [6] WURM, K.: Z. Astrophysik **2**, 133 (1931). – [7] MINNAERT, M.: Z. Astrophysik **10**, 40 (1935). – [8] MINNAERT, M.: Z. Astrophysik **12**, 313 (1936). – [9] HOUTGAST, J.: The Variations in the Profiles of Strong Fraunhofer Lines along a Radius of the Solar disc. Utrecht, Dissertation 1942. – [10] ZANSTRA, H.: Monthly Notices **101**, 250 u. 273 (1941). – [11] SPITZER, L.: Astro-

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1950VeGoe...5..385V

physic. J. **99**, 1 (1944). – [12] UNSÖLD, A.: Ann. Physik, 6. Folge, **3**, 124 (1948). – [13] BARBIER, D.: Ann. d'Astrophysique **9**, 173 (1946). – [14] DE JAGER, C.: Proceed. Nederl. Akad. v. Wetensch. **51** Nr. 6 (1948). – [15] STRÖMGREN, B: Publ. Obs. Kopenhagen Nr. 138 (1944). – [16] CHANDRASEKHAR, S., u. H. BREEN: Astrophysic. J. **104**, 430 (1946). – [17] UNSÖLD, A.: VJS der AG, 78. Jahrg., 213 (1943). – [18] LINDHOLM, E.: Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **28** B, Nr. 3 (1941) und Dissertation Upsala (1942). – [19] ECKARTH, H.: Z. Physik **107**, 182 (1937). – [20] UNSÖLD, A.: Z. Astrophysik **24**, Heft 3/4 (1948). – [21] BIERMANN, L.: Z. Astrophysik **21**, 320 (1942). – [22] TEN BRUGGENCATE, P., H. GOLLNOW, S. GÜNTHER u. W. STROHMEIER: Veröff. d. UnivSternw. Göttingen Nr. 92 (1949), Z. Astrophysik **26**, 51 (1949).

Dr. HANS-HEINRICH VOIGT, Kiel, Olshausenstr. ,Neue Universität, Bau 13/I.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System